2019年8月7日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2020年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

（1問100点 × 問題選択数4問 ＝ 合計400点）

9:00～12:30

問題数 5問

注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと．
2．　問題５問の中から４問選択して解答せよ．
3．　万一落丁を見つけた場合には，手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること．

1．

図１－１に示すように，距離 h だけ隔てておかれた互いに平行な無限に広い平面壁にはさまれた非圧縮性の粘性流体を考える．外力は働いていない．$y=0$ の面 (下面) は静止している．$y=h$ の面 (上面) は x の正の向きに一定の速さ U で動いている．上下の壁は多孔質で，下面から一様に流体をわき出させ (吸い込ませ)，上面に一様に吸い込ませ (わき出させ) ることができる．以下では，図の奥行方向および x 方向に流速と圧力の変化がない，xy 面内の定常な２次元流である場合を考える．以下の問いに答えよ．解答にあたっては，流速の x 成分と y 成分，圧力，密度，粘性係数をそれぞれ記号 u，v，p，ρ，μ で表し (ρ，μ はそれぞれ正の定数)，上下面では流速の x 成分に粘着の条件 (上面で $u=U$，下面で $u=0$) が成り立っているものとせよ．

１－１　u，v，p がしたがう方程式 (連続の式と運動方程式) を書け．ただし，導出過程を書く必要はない．さらに，それらの方程式をもとに p が一定であることを示せ．

１－２　上下面で流体のわき出しも吸い込みもない場合を考える．u の y 方向分布を求めよ．

１－３　下面で流体が一様にわき出し，上面で一様に吸い込まれている場合を考える．下面における流体の速度の y 成分が V (V は正の定数) のとき，u の y 方向分布を求めよ．

１－４　１－３の場合に下面の単位面積あたりに働く力の x 成分 F を求めよ．

１－５　上面で流体が一様にわき出し，下面で一様に吸い込まれている場合を考える．下面における流体の速度の y 成分が $-V$ (V は１－３の場合と同じ正の定数) のとき, 下面の単位面積あたりに働く力の x 成分の大きさは１－４で求めた F の大きさに比べて大きいか，小さいか，同じかを根拠を示して答えよ．

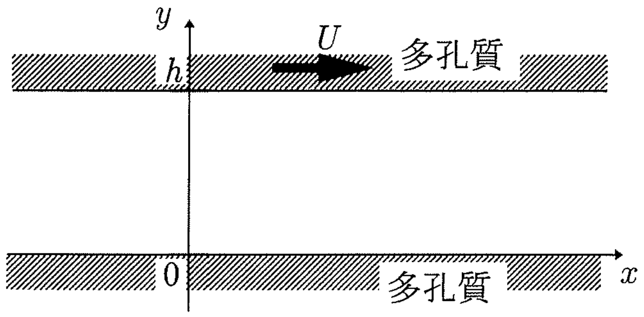

図１－１

(第１問おわり)

２．

図２－１の模式図に示すような，圧縮機，燃焼器，タービンおよび熱交換器から構成されるガスタービンを想定し，これを理想化したブレイトン再生サイクルについて考えよう．作動流体の空気は理想気体とする．系は定常状態にある．燃焼器では加熱のみが行われ，燃料供給に伴う質量流量や組成の変化はないものとする．熱交換器では，圧縮機から排出された作動流体と，タービンから排出された作動流体との間で熱交換が行われる．この時，熱交換器内での圧力損失は無視し，それぞれの過程を等圧過程とみなせるものとする．

状態 1 の作動流体は，圧縮機で断熱圧縮されて状態 2 に至り，さらに熱交換器における等圧過程を経て，状態 2'で燃焼器へ供給される．燃焼器で等圧加熱された作動流体は状態 3 でタービンに供給され，タービンで断熱膨張する結果，状態 4 に至る．状態 4 の作動流体は熱交換器での等圧過程を経て，状態 4'で排出される．ここで状態 i （$i = 1, 2, 2', 3, 4, 4'$）は図２－１中に示した数字の位置と対応しており，各位置における作動流体の圧力，温度，比エントロピーをそれぞれ p_i，T_i，s_i （$i = 1, 2, 2', 3, 4, 4'$）で表すものとする．作動流体の定圧比熱容量と比熱容量比は一定とし，それぞれ c_p と γ で表す．また，圧縮機における圧力比 p_2/p_1 を φ で表す．さらに，本問では温度 T_1 と T_3 はそれぞれ一定とする．

以下の問いに答えよ．なお，グラフを描くときには，各点の相対的位置関係が正しくなるように描け．

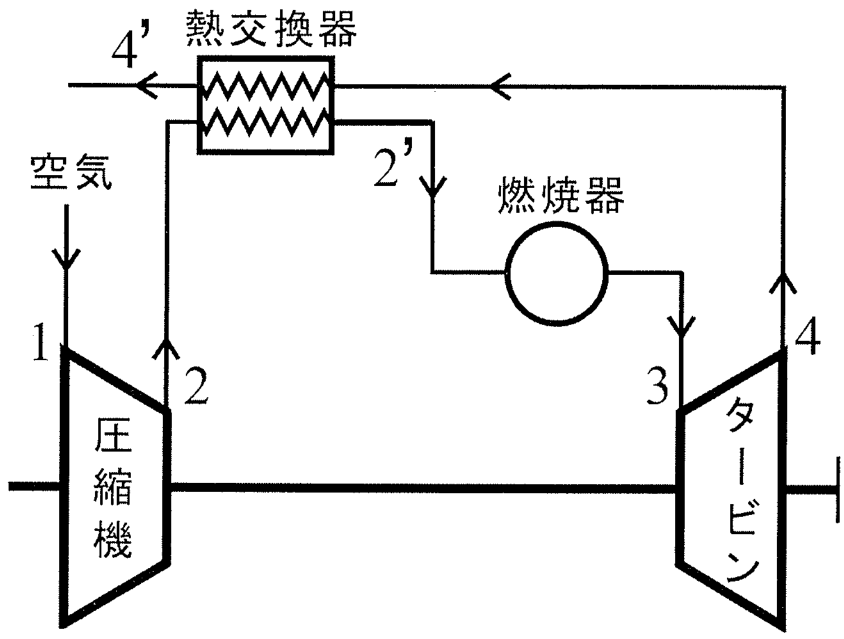

図２－１

（第２問　次のページにつづく）

2－1

はじめに，熱交換器が全く機能せず作動流体間で熱交換しない場合（ブレイトンサイクル），すなわち $T_{2'} = T_2$，$T_{4'} = T_4$ の場合について考える．

（1）圧縮機で作動流体になされる単位質量あたりの仕事を W_{12} ，タービンで作動流体がなす単位質量あたりの仕事を W_{34} とする．W_{12} と W_{34} をそれぞれ T_1，T_2，T_3，T_4，c_p の中から必要なものを用いて表せ．

（2）外部に取り出せるサイクルの単位質量あたりの仕事 $W = W_{34} - W_{12}$ を T_1, T_3, c_p，φ，γ を用いて表せ．

（3）この場合のサイクルの熱効率 η_A を φ と γ を用いて表せ．

（4）正の仕事（$W > 0$）が得られる圧力比 φ の範囲として以下の空欄に入る値を T_1，T_3，γ を用いて表せ．

$$1 < \varphi < \boxed{}$$

（5）仕事 W と圧力比 φ の関係において，W はある φ にて極大値をとる．このときの φ を T_1，T_3，γ を用いて表せ．

（6）W と φ の関係を，縦軸を W，横軸を φ としたグラフに描け．

（第2問　次のページにつづく）

２－２

つぎに，熱交換器において作動流体間で理想的に熱交換が行われる場合，すなわち，$T_{2'} = T_4$，$T_{4'} = T_2$ の場合について考える．

（１）外部に取り出せるサイクルの単位質量あたりの仕事 W を T_1，T_3，c_p，φ，γ を用いて表せ．

（２）この場合のサイクルの熱効率 η_B を T_1，T_3，φ，γ を用いて表せ．

（３）縦軸をサイクルの熱効率，横軸を圧力比 φ として，問い２－２（２）で求めた η_B を実線でグラフに描け．さらに同グラフ中に，問い２－１（３）で求めた η_A を破線で描け．

（４）問い２－２（３）のグラフにおいて，η_B と η_A が互いに等しくなるときの圧力比を φ_X とする．φ_X を T_1，T_3，γ を用いて表せ．

（５）圧力比 φ が問い２－２（４）で求めた φ_X よりも小さいときについて考える．理想的に熱交換が行われる場合のサイクルの T–s 図を描け．図中には状態 i （i = 1, 2, 2', 3, 4, 4'）を示す数字を適切な位置に記せ．

（６）圧力比 φ が φ_X よりも大きいときの，理想的に熱交換が行われる場合のサイクルの T–s 図を描け．図中には状態 i （i = 1, 2, 2', 3, 4, 4'）を示す数字を適切な位置に記せ．

（第２問　おわり）

３．

３－１

図３－１に示すように，断面形状と材質が一様であり，縦弾性係数が E，断面二次モーメントが I，長さが l の両端単純支持はり AB がある．このはり AB の中央点 C から微小な距離 d だけ下方に支点 D を設置する．このはりの A 端を原点とし，右向きを x 軸の正の向き，下向きを y 軸の正の向きとする．このはり AB の全長にわたって等分布荷重（単位長さあたりの荷重）を下向き（y 軸の正の向き）に加えるときを考える．以下の問いに答えよ．なお，はり AB の自重は無視できるものとする．

（１）はり AB に等分布荷重 w_1 を加えたところ，はり AB と支点 D は接触しなかった．このときのはり AB に関するせん断力図，ならびに，曲げモーメント図を示せ．

（２）問（１）のときのはり AB の中央点 C におけるたわみ y_C を求めよ．

（３）はり AB に等分布荷重を加えて中央点 C と支点 D が接触した後，さらに等分布荷重を増加させた．この状態の等分布荷重を w_2 とし，以下の問いに答えよ．なお，はり AB の中央点 C と支点 D が接触した後は，支点 D は単純支持点としてはたらくものとする．

（３－a）はり AB の中央点 C における支点 D からの反力 R_D を，E, I, l, d, w_2 を用いて表せ．

（３－b）はり AB が支点 A，B，D から受ける反力がすべて等しくなるときの等分布荷重 w_2 を，E, I, l, d を用いて表せ．

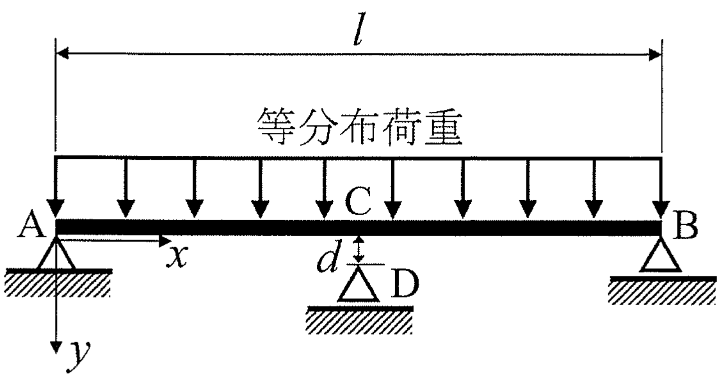

図３－１

（第３問　つぎのページにつづく）

３－２

図３－２に示すように，材質が一様な丸棒 AB（縦弾性係数 E_1，長さ l_1，断面積 S_1，線膨張係数 α_1）と丸棒 CD（縦弾性係数 E_2，長さ l_2，断面積 S_2，線膨張係数 α_2）を，長手方向に微小な距離 δ だけ離して剛体壁に固定する．丸棒 AB の B 端には，厚みが無視でき，断面積が S_1, S_2 に比べて十分大きな剛体円板が取り付けられている．このとき，丸棒 AB と丸棒 CD の温度は互いに等しく，両丸棒と剛体円板は中心軸がそれぞれ一致するよう取り付けられている．ここで，丸棒 AB および丸棒 CD を互いに等しい温度に保ちながら昇温することを考える．以下の問いに答えよ．なお，剛体壁は移動せず，剛体壁と剛体円板はともに熱膨張しないものとする．また，丸棒 AB と丸棒 CD の断面積は温度の変化によって変わらないものとし，両丸棒は座屈しないものとする．両丸棒と剛体円板の自重は無視できるものとする．

（１）丸棒 AB と丸棒 CD の温度を上昇させたところ，昇温開始時から温度が ΔT_1 上昇した時点で丸棒の B 端と C 端が剛体円板を介して互いに接触した．このときの ΔT_1 を求めよ．

（２）丸棒 AB と丸棒 CD を昇温し，両者が剛体円板を介して接触した後，さらに温度を上昇させた．このときの，最初の昇温開始時からの温度上昇を ΔT_2 とし，丸棒 AB および丸棒 CD に生じる熱応力をそれぞれ求めよ．なお，記号 ΔT_1 は用いないこと．

（３）問（２）のときの丸棒 AB の長さを求めよ．

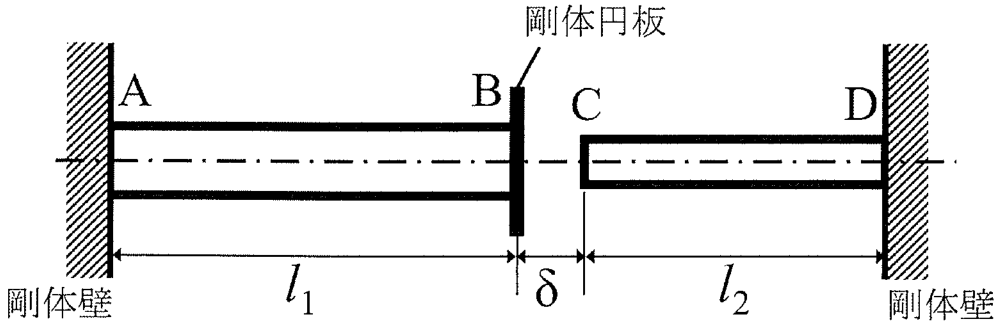

図３－２

（第３問　おわり）

4．

4－1

カーリングにおけるストーンの投てきについて図4－1のような単純化されたモデルを考える．ストーンは直線上を運動するものとし，$x(t)$ をストーンの位置，$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ をストーンの速度とする．ただし，t は時間を表す変数である．ストーンは質量 m の質点としてモデル化され，プレイヤーから加えられる力 $f(t)$ と，速度と反対方向に生じ速度に正の定数 c で比例する大きさの摩擦力 $-cv(t)$ を受けて運動するものとする．また，$f(t)$ と $x(t)$ の正の向きは同一であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．

（1）ストーンの運動方程式を求めよ．また，入力を $u(t) = f(t)$，出力を $y(t) = x(t)$ とした場合の伝達関数 $P(s)$ を求めよ．

ここで，目標位置

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (0 \leq t) \end{cases}$$

にストーンを追従させるために，図4－2のフィードバック系を構成してストーンを制御することを考える．制御対象の伝達関数 $P(s)$ は（1）で求めたものとし，制御器は伝達関数

$$K(s) = k_1 + k_2\frac{1}{s}$$

で表されるものとする．ただし，k_1, k_2 は実定数である．このとき，以下の問いに答えよ．

（2）このような伝達関数で表される制御器の名称を答えよ．

（3）$r(t)$ のラプラス変換 $R(s)$ を，ラプラス変換の定義に基づいて計算せよ．その際，計算過程を示すこと．

（4）r から y までの伝達関数を $P(s)$，$K(s)$ によって表せ．

（5）$k_2 = 0$ のとき，フィードバック系が安定であるための k_1 に関する条件を示し，安定である場合について定常偏差を求めよ．

（6）$k_2 \neq 0$ のとき，フィードバック系が安定であるための k_1, k_2 に関する条件を示し，安定である場合について定常偏差を求めよ．

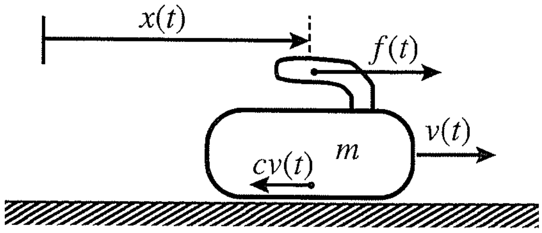

図4－1

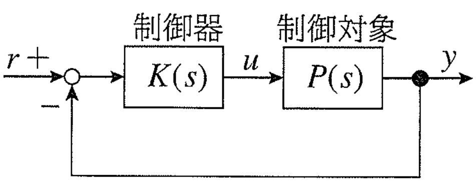

図4－2

（第4問　つぎのページにつづく）

4－2

伝達関数

$$P(s) = \frac{1}{s\left(s+8-\sqrt{35}\right)\left(s+8+\sqrt{35}\right)}$$

で表される制御対象に対し，図４－２のブロック線図で表されるフィードバック系を構成して制御をおこなう．

まず，k_1 を実定数として伝達関数が

$$K(s) = k_1 \tag{4.1}$$

となる制御器を用いる場合を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

（１）根軌跡，すなわち k_1 を 0 から $+\infty$ まで変化させたときのフィードバック系の極の軌跡の概形を描け．その際，軌跡の始点と $k_1 \to +\infty$ のときに極が漸近する点もしくは線を示し，実軸との交点をもつ漸近線については交点の座標と実軸となす角度を示せ．

（２）フィードバック系の極のうち実部が最大のものを代表極と呼ぶ．このフィードバック系の代表極の実部が最小となるように k_1 を設計するとき，代表極と k_1 の値を求めよ．

次に，k_2 を実定数として伝達関数が

$$K(s) = k_2 \frac{s+1}{s+10} \tag{4.2}$$

となる補償要素を制御器として用いる場合を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

（３）この補償要素の名称を答え，用いられる目的をフィードバック系の安定性と応答の２つの観点から説明せよ．

（４）根軌跡，すなわち k_2 を 0 から $+\infty$ まで変化させたときのフィードバック系の極の軌跡の概形を描け．その際，軌跡の始点と $k_2 \to +\infty$ のときに極が漸近する点もしくは線を示し，実軸との交点をもつ漸近線については交点の座標と実軸となす角度を示せ．根軌跡が実軸から分岐する位置を正確に示す必要はない．

（５）（３）で述べた目的が達成されているかどうかを，(4.1) の制御器による根軌跡と (4.2) の制御器による根軌跡を比較して論じよ．その際，極の配置とフィードバック系の性質の関係についても説明せよ．ただし，(4.2) の制御器を用いる場合については，実軸上の $-1 < s < 0$ にある極は制御器のゼロ点とほぼ相殺するものと考えて無視してよい．

（第４問　おわり）

5．

量子力学では，粒子の位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ や運動量 $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ は波動関数に作用する演算子で表される．具体的に対応する演算子は

$$x \to x,\quad y \to y,\quad z \to z \tag{5.1}$$

$$p_x \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x},\quad p_y \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial y},\quad p_z \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \tag{5.2}$$

である．ここで，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$，h はプランク定数である．

（1）x と p_x がそれぞれ(5.1)式と(5.2)式の演算子で与えられるとき，以下の交換関係を示せ．

$$[x, p_x] = i\hbar \tag{5.3}$$

角運動量 $\boldsymbol{l} = (l_x, l_y, l_z)$ は

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{5.4}$$

で定義される．

（2）(5.1)式と(5.2)式より，l_x に対応する演算子を求めよ．

（3）角運動量の演算子に関する以下の交換関係を示せ．

$$[l_x, l_y] = i\hbar l_z \tag{5.5}$$

（第５問　つぎのページにつづく）

次に，角運動量の演算子を(5.6)式の交換関係を満たす演算子として再定義する．

$$[l_x, l_y] = i\hbar l_z,\quad [l_y, l_z] = i\hbar l_x,\quad [l_z, l_x] = i\hbar l_y \tag{5.6}$$

さらに，角運動量の演算子から次のように定義される演算子

$$l^2 \equiv l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 \tag{5.7}$$

と演算子l_zとの交換関係を計算すると

$$[l^2, l_z] = 0 \tag{5.8}$$

となることが分かっている．このことより，演算子l^2と演算子l_zは同じ波動関数に対して，同時に固有値を持つことが分かる．そこでl^2，l_zそれぞれの固有値を$\hbar^2\beta$，$\hbar m$として，それらの固有値に属する共通の固有状態の波動関数を$\psi_{\beta,m}$とする．また，βがある１つの値で指定される固有状態において，mの取り得る値に最大値$m_{\max}$と最小値$m_{\min}$があることが分かっており，それぞれの固有状態の波動関数を$\psi_{\beta,m_{\max}}$と$\psi_{\beta,m_{\min}}$とする．

新しい２つの演算子を

$$l_+ \equiv l_x + il_y,\ l_- \equiv l_x - il_y \tag{5.9}$$

で定義する．

（4）演算子$l_z l_+$，$l_z l_-$を$\psi_{\beta,m}$に作用させることで，l_+，l_-がそれぞれ固有状態をどのように変化させるかを記述せよ．

（5）演算子$l_- l_+$を$\psi_{\beta,m_{\max}}$，$l_+ l_-$を$\psi_{\beta,m_{\min}}$に作用させることで，βと$m_{\max}$，βと$m_{\min}$の間に成立するそれぞれの関係式を求めよ．

（6）（4）と（5）の両方の結果を用いて，mの取り得る値を求めよ．

（第５問　つぎのページにつづく）

原子が一様な磁束密度中にあるとする．磁束密度は大きさ B で z 方向を向いている．β がある 1 つの値で指定される固有状態に原子があるとし，原子のエネルギー固有値 E_m が(5.10)式だけで決まるとしよう．

$$\frac{eB}{2M} l_z \psi_{\beta,m} = E_m \psi_{\beta,m} \tag{5.10}$$

ここで，$e\,(>0)$ は素電荷，M は電子の質量である．

（7）原子が絶対温度 T の熱平衡状態にあるとき，m で指定される固有状態に原子が見出される確率 P_m を求めよ．ただし，ボルツマン定数を k_B とする．

（第５問　おわり）