2026年8月3日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2027年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

（1問100点 × 問題数4問 ＝ 合計400点）

9:00～12:30

問題数 4問

注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと.
2．　問題冊子は表紙と白紙の他に１０ページある.
3．　問題４問すべてに解答せよ.
4．　落丁・乱丁・印刷不鮮明等があった場合は，すみやかに手を挙げて試験監督者に申し出ること.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

1．

1－1

粘性のない非圧縮性流体の二次元ポテンシャル流れをxy平面上で考える．原点Oに置かれた反時計回りの循環Γを持つ渦糸の複素速度ポテンシャルは，複素数$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$を用いて，

$$W(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$$

により表される．なお，$i^2 = -1$である．また，Γの符号は反時計回りを正，x，y方向の流速をそれぞれu，vとする．以下の問いに答えよ．

（1）　原点Oに置かれた循環Γを持つ渦糸が誘起する流れの速度(u, v)を(r, θ)の関数として求めよ．

（2）　図1－1に示すように，$y = 0$の平面壁からhだけ離れた A 点$(x, y) = (0, h)$に循環Γを持つ渦糸が固定して置かれている．この渦糸が誘起する流れは，A 点の渦糸と，x軸に対してA点と対称な位置B点$(x, y) = (0, -h)$に置かれた循環$-\Gamma$を持つ渦糸の重ねあわせにより表される．この流れの複素速度ポテンシャルを求めよ．

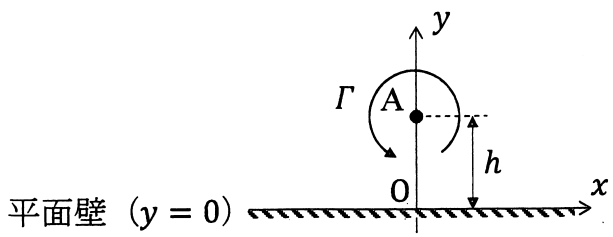

図1－1

（3）　問い1－1（2）の流れにおいて，平面壁上（$y = 0$）の速度(u, v)をxの関数として求めよ．

（4）　x軸負の方向に流れる速さUの一様流において，$y = 0$の平面壁からhだけ離れた A 点$(x, y) = (0, h)$に循環Γを持つ渦糸が固定して置かれている．この流れの複素速度ポテンシャルを求めよ．

（5）　問い1－1（4）の流れにおいて，渦糸が自由に運動できるようにする．このとき，渦糸が静止するときのΓを求めよ．

（第1問　つぎのページにつづく）

１－２

図１－２に示すように，直径d_Aの円筒タンク内の水が側面の小さなノズルから流れ出ることで，水位が時間とともに低下する場合を考える．ノズルの断面は直径d_Bの円形である．時刻tにおいて，ノズルから水面までの高さを$h(t)$，水面の下降速度を$v_A(t)$，ノズルからの流出速度を$v_B(t)$とする．また，水面の初期高さを$h(t=0)=h_0$とし，水面がノズル位置より十分に高い場合を考える．なお，d_Aはd_Bと比べて十分に大きく，hの時間変化が緩やかであるとする．水の密度ρ，重力加速度gは定数として，水は完全流体として扱えばよい．以下の問いに答えよ．

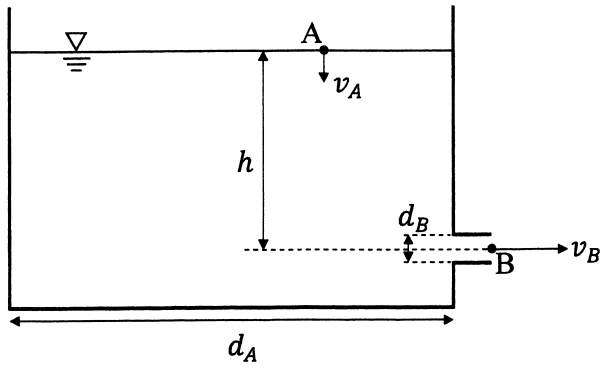

図１－２

（１）　v_Aとv_Bの関係を連続の式により表せ．

（２）　水面からノズル出口までの流線上の A 点と B 点に対するベルヌーイの式を用いて，v_Aとv_Bの関係を求めよ．なお，A 点と B 点の圧力はともに大気圧に等しいとする．

（３）　v_Bをhの関数として求めよ．

（４）　hの時間変化に関する微分方程式を求めよ．

（５）　問い１－２（４）で求めた微分方程式を解くことで，hをtの関数として求めよ．

（６）　ノズルからの水の流出によりタンクが水平方向にうける力Fをhの関数として求めよ．ここでは水の流出方向に作用する力を正とする．

（第１問　おわり）

2.

2－1

単一成分で単位質量の理想気体を作動気体とする以下の可逆サイクルを考える（図2－1参照）．ただし，各状態変化の過程では相変化は伴わないとする．各状態 i ($i = 1, 2, 3, 4$) における熱力学的変数をそれぞれ圧力 p_i，温度 T_i，比体積 v_i，比エントロピー s_i とする．また，単位質量当たりの定積比熱容量を c_v（正の定数），定圧比熱容量を c_p，比熱比を $\gamma = c_p/c_v$（一定）とする．

$1 \to 2$：断熱圧縮過程，　$2 \to 3$：定積加熱過程
$3 \to 4$：断熱膨張過程，　$4 \to 1$：定積放熱過程

（1） 過程 $1 \to 2$ において T_1, v_1, T_2, v_2 の間に成り立つ関係を γ を使って書け．

（2） 過程 $2 \to 3$ において作動気体が吸収する熱量 q_1 を求めよ．

（3） 過程 $2 \to 3$，過程 $3 \to 4$ それぞれでの作動気体の比エントロピー変化 Δs_{23}，Δs_{34} を求めよ．

（4） このサイクルの熱効率 η_O が，圧縮率 $\epsilon = (v_1/v_2)$ と γ を使って

$$\eta_O = 1 - \frac{1}{\epsilon^{\gamma-1}}$$

と書けることを示せ．

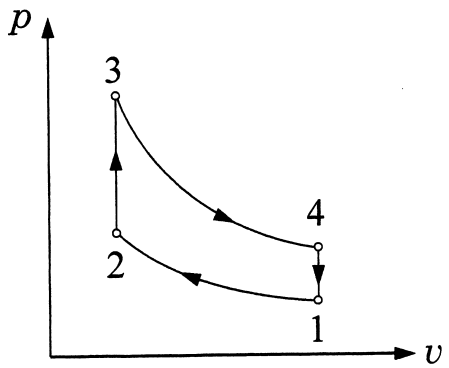

図2－1

（第2問　つぎのページにつづく）

2－2

準静的過程における気体の状態変化について考える．単位質量当たりの比内部エネルギー，比エントロピー，比体積，気体定数をそれぞれ u, s, v, R，温度，圧力をそれぞれ T, p とする．以下の問いに答えよ．

（1）　準静的過程では

$$du = Tds - pdv \qquad (2.1)$$

が成り立つ．u および s を v と T の関数としたときのそれぞれの全微分から，以下の関係式を導け．

$$p = -\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + T\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \qquad (2.2)$$

（2）　理想気体の場合，u は v に依存しないことを示せ．なお必要なら，

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

を使ってもよい．

（3）　この理想気体を準静的に断熱膨張させる場合を考える．断熱膨張過程の温度変化は

$$\frac{\Delta T}{\Delta v} = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T}{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v} \qquad (2.3)$$

と表せる．$\Delta T/\Delta v$ を定積比熱容量 c_v (>0)，p を使って書け．

（4）　問い2－2（3）の温度変化と，理想気体の真空中への断熱自由膨張での温度変化との違いを仕事，内部エネルギーの観点から100文字程度で説明せよ．

（第2問　つぎのページにつづく）

2－3

N 個の単原子分子からなる系の分配関数 $\mathcal{Z}$ は，古典統計力学では系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ を用いて以下のように書かれる．

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N!\,h^{3N}} \int \cdots \int d\boldsymbol{q}_1 \cdots d\boldsymbol{q}_N d\boldsymbol{p}_1 \cdots d\boldsymbol{p}_N \, e^{-\beta \mathcal{H}(\boldsymbol{q}_1,\ldots,\boldsymbol{q}_N,\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_N)}$$

ここで，h はプランク定数，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$（$k_{\mathrm{B}}$ はボルツマン定数），$\boldsymbol{q}_i$，$\boldsymbol{p}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ はそれぞれ位相空間での粒子（単原子分子）i の空間座標，その運動量，また，$d\boldsymbol{q}_i = dx_i dy_i dz_i$，$d\boldsymbol{p}_i = dp_{ix} dp_{iy} dp_{iz}$ である．以下の問いに答えよ．なお，以下では特に断らない限り，N 個の質量 m の単原子分子からなる体積 V，温度 T の理想気体を考え，熱力学的状態変化は準静的とする．また必要なら，自然数 n が十分に大きい場合に成り立つ近似式，$\ln n! \approx n(\ln n - 1)$ を使ってもよい．

（1）　この系の分配関数 $\mathcal{Z}$ が

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N!} V^N \left(\frac{2\pi m}{h^2 \beta}\right)^{3N/2} \qquad (2.4)$$

と書けることを示せ．ただし，必要なら以下の関係式を使ってもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \quad (c > 0)$$

（2）　系の内部エネルギー U（エネルギーの期待値）は分配関数 $\mathcal{Z}$ を用いて

$$U = -\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} \qquad (2.5)$$

と書ける．また，$\ln \mathcal{Z}$ を β と V の関数とすれば，

$$d \ln \mathcal{Z} = -U d\beta + \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial V} dV$$

であり，整理すると

$$dU = \frac{1}{\beta} d(\ln \mathcal{Z} + \beta U) - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial V} dV \qquad (2.6)$$

となる．系の圧力 p と $\mathcal{Z}$ の関係を求め，本問いの理想気体に対して成り立つ状態方程式を示せ．

（3）　系のエントロピー S が

$$S = k_{\mathrm{B}}(\ln \mathcal{Z} + \beta U) + S_0 \quad (S_0 \text{は定数}) \qquad (2.7)$$

の形に書けることを示せ．

（第２問　つぎのページにつづく）

（4）　式（2．4），式（2．5），式（2．7）を参考に，問い2－1と同じ定積加熱過程（$2 \rightarrow 3$）における本問いの理想気体の内部エネルギー変化およびエントロピー変化を計算せよ．

（5）　式（2．4），式（2．7）を参考に，問い2－1と同じ断熱膨張過程（$3 \rightarrow 4$）における本問いの理想気体のエントロピー変化を計算せよ．ただし，比熱比は一定としてよい．

（6）　体積 $2V$ の断熱容器内で，同じ体積 V の2つの領域に仕切りで分けられた同種の単原子分子からなる理想気体（それぞれの領域でともに粒子数 N，温度 T）がある．仕切りを取り除く過程での系のエントロピー変化について考える．式（2．4），式（2．7）を参考に，系のエントロピー変化を求めよ．

（7）　体積 $2V$ の断熱容器内で，同じ体積 V の2つの領域に仕切りで分けられた異種の単原子分子からなる理想気体A，B（分子の質量はそれぞれ m_{A}，m_{B} で，ともに粒子数 N，温度 T）がある．仕切りを取り除きAとBを準静的に混合させる．この場合の系のエントロピー変化は，それぞれの気体が断熱容器内で体積 $V \rightarrow 2V$ に変化する過程での変化量から求めることができる．式（2．4），式（2．7）を参考に，系のエントロピー変化を求めよ．

（第2問　おわり）

3．

3－1

図3－1に示すはりの変形について，以下の問いに答えよ．はりの左端 A から右端 B にかけて，断面形状・寸法は一様であり，はりの全長は $2L$，縦弾性係数は E，中立軸に関する断面二次モーメントは I である．はりは，左端 A において固定支持されており，点 D において移動支点で支えられている．点 C に設けられたヒンジ部においては，たわみが連続で，曲げモーメントが 0 になるとする．はりの右端 B に対して，図3－1で示した y 軸の正方向に，力 W を作用させた．はりに生じる変形は微小とする．また，はりの自重は考えない．

（1） はりの区間 CB に対するモーメントのつり合いを考えることで，はりの点 D に生じる支点反力 R_D を求めよ．図3－1で示した R_D の方向を正とする．

（2） はり全体に対する力のつり合い，および，区間 AC に対するモーメントのつり合いを考えることで，はりの左端 A に生じる支点反力 R_A，および，支点モーメント M_A をそれぞれ求めよ．図3－1で示した R_A，および，M_A の方向を正とする．

（3） はりのせん断力図，および，曲げモーメント図をそれぞれ図示せよ．左端 A，右端 B，点 C，点 D に生じるせん断力 F と曲げモーメント M の値と符号を明示すること．図3－2で示した，はりの仮想断面に生じるせん断力 F，および，曲げモーメント M の方向を正とする．

（4） はりの右端 B におけるたわみ y_B を求めよ．たわみ y_B の方向は，図3－1で示した y 軸の正方向を正とする．

（5） はりの点 C におけるたわみ y_C を求めよ．たわみ y_C の方向は，図3－1で示した y 軸の正方向を正とする．

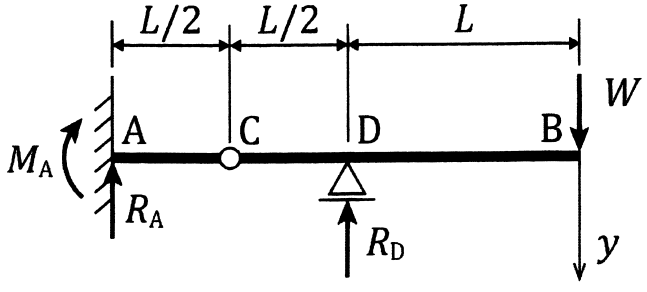

図3－1

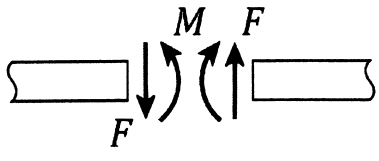

図3－2

（第3問　つぎのページにつづく）

３－２

図３－３，および，図３－４に示す軸対称棒の変形について，以下の問いに答えよ．これらの図に示した棒の断面は中実円であり，左端 A（直径 $2a$）から右端 B（直径 a）にかけて，断面の直径が線形に変化する．棒の全長は L，横弾性係数は G である．棒に生じる変形は微小とする．また，棒の自重は考えない．棒の右端 B を原点（$x = 0$）として，左端 A の方向に x 軸をとる．

（１）棒の任意の位置 x における断面の中心に関する断面二次極モーメント $I_p(x)$ を求めよ．

（２）図３－３に示すように，棒の左端 A が固定支持されており，$x = L/3$ の位置 C にねじりモーメント T を作用させた．棒の区間 AC における任意の位置 x での比ねじれ角（単位長さ当たりのねじれ角）$\theta(x)$ と T, G, $I_p(x)$ の間に成り立つ関係式を示せ．

（３）図３－３の棒に関して，位置 C におけるねじれ角 φ_C を求めよ．ねじれ角 φ_C の方向は，図３－３で示した T の方向を正とする．

（４）図３－４に示すように，棒の両端が固定支持されており，$x = L/3$ の位置 C にねじりモーメント T を作用させた．棒の両端に生じるねじりモーメント T_A, T_B をそれぞれ求めよ．図３－４で示した T_A, T_B の方向を正とする．

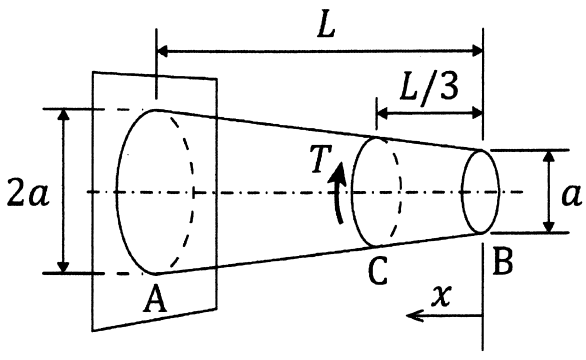

図３－３

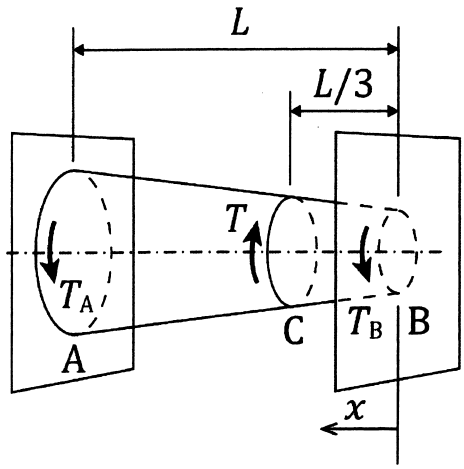

図３－４

（第３問　おわり）

4．

ここでは，sをラプラス変換の変数とする．以下の問いに答えよ．

4－1

伝達関数$P(s)$が，

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$$

であるようなプラントについて，以下の問いに答えよ．

（1）　このプラントに，ステップ入力が加わったとき，十分に時間がたった後の出力のステップ幅は，入力のそれの何倍になるかを答えよ．

（2）　このプラントに，角周波数ωの正弦波が加わったとき，十分に時間がたった後の出力の振幅は，入力のそれの何倍になるかを答えよ．

（3）　このプラントと，定数ゲインKの P 補償によって，図4－1のようなフィードバック制御系を構成する．図中rは目標値で，yは出力である．目標値が単位ステップである場合，十分に時間がたった後の定常偏差$(r-y)$の値を答えよ．

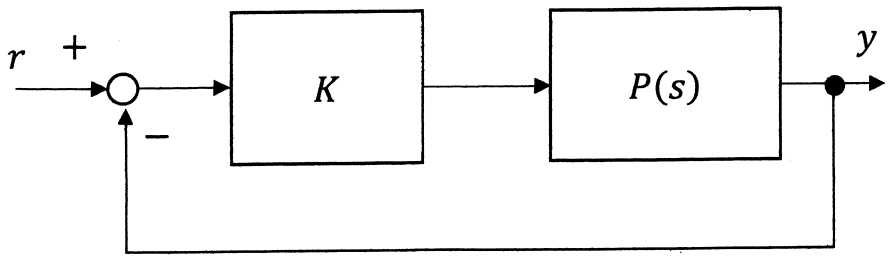

図4－1

（4）　単位ステップ入力に対して十分に時間がたった後の定常偏差を0とするには，P 補償の代わりに，積分補償K/sを適用すればよい．積分補償によるフィードバック制御系が安定となるようなKの範囲を求め，定常偏差が0となることを確認せよ．

（第4問　つぎのページにつづく）

4－2

伝達関数$P(s)$が，

$$P(s) = \frac{1}{s(Ts+1)^2}$$

であるようなプラントについて，以下の問いに答えよ．ここで，$T > 0$とする．

（1）　図4－2のようなP補償によるフィードバック制御系を考える．ただし，$K > 0$とする．このフィードバック制御系が安定となるゲインKの範囲を求めよ．

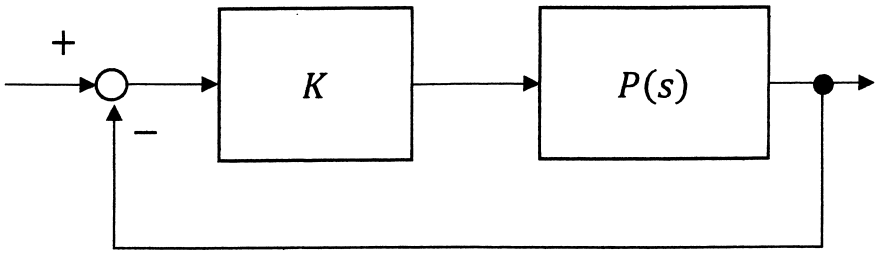

図4－2

（2）　このP補償によるフィードバック制御系について，開ループ伝達関数のベクトル軌跡の概略を描け．切片と漸近線を明記すること．

（3）　図4－3のようなPD補償によるフィードバック制御系を考える．ただし，$K_P > 0$，$0 < T_D < T/2$とする．このフィードバック制御系が安定となるようなゲインK_Pの範囲を求めよ．

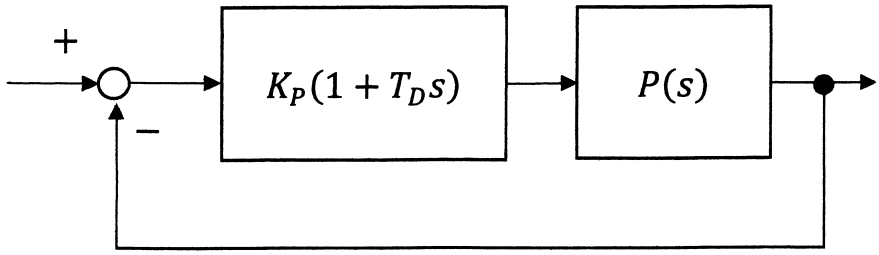

図4－3

（4）　このPD補償によるフィードバック制御系について，開ループ伝達関数のベクトル軌跡の概略を描け．切片と漸近線を明記すること．

（5）　ゲイン余裕は，P補償の場合とPD補償の場合のどちらが大きくなるか説明せよ．

（第4問　おわり）

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.