2026年8月2日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2027年度大学院修士課程入学試験問題

機械力学

（150点）

13:00～14:30

問題数 2問

注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと.
2．　問題冊子は表紙と白紙の他に4ページある.
3．　問題2問すべてに解答せよ.
4．　落丁・乱丁・印刷不鮮明等があった場合は，すみやかに手を挙げて試験監督者に申し出ること.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

1．

図1－1に示す剛体のコマを考える．Oはコマの質量中心とする．$\hat{\boldsymbol{e}}_i$ $(i=1,2,3)$ を単位ベクトルとし，Oを原点とする直交座標系 $\hat{\Sigma}(\mathrm{O}-\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3)$ をとる．コマは $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ 軸に関して軸対称である．軸 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$，$\hat{\boldsymbol{e}}_2$，$\hat{\boldsymbol{e}}_3$ まわりの主慣性モーメントをそれぞれ I_1，$I_2=I_1$，I_3 とする．$\hat{\Sigma}$ に対して，コマは $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ 軸まわりに十分に大きな正の角速度 ω_s で回転している．

Oは地球表面上のある一点に固定されている．地球は完全な球体であり，その自転角速度 Ω は正の定数であるとする．図1－2に示すように，Oの緯度を λ とする．λ は北緯を正とする．Oを原点とし，北，西，鉛直上方を向く単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ とし，直交座標系 $\Sigma(\mathrm{O}-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)$ をとる．$\boldsymbol{e}_3$ と $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ が張る平面と $\boldsymbol{e}_1$ 軸のなす角を ψ とする．また，$\boldsymbol{e}_3$ と $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ のなす角を θ とし，それぞれの正の方向は図1－3に示す通りに定める．Σ を $\boldsymbol{e}_3$ 軸まわりに ψ だけ回転させたのち，$\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 軸まわりに θ だけ回転させた座標系が $\hat{\Sigma}$ である．Oに関するコマの角運動量ベクトルを $\boldsymbol{L}$，コマに作用する外力のOに関するモーメントを $\boldsymbol{M}$ とする．公転など地球の移動の影響は無視できるとする．以下の問いに答えよ．

1－1　$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ と $\hat{\boldsymbol{e}}_1$，$\hat{\boldsymbol{e}}_2$，$\hat{\boldsymbol{e}}_3$ の間には以下の関係式が成立することを示せ．

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi\hat{\boldsymbol{e}}_1-\sin\psi\hat{\boldsymbol{e}}_2+\sin\theta\cos\psi\hat{\boldsymbol{e}}_3\\ \cos\theta\sin\psi\hat{\boldsymbol{e}}_1+\cos\psi\hat{\boldsymbol{e}}_2+\sin\theta\sin\psi\hat{\boldsymbol{e}}_3\\ -\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_1+\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_3\end{bmatrix}$$

1－2　慣性系からみた $\hat{\Sigma}$ およびコマの角速度ベクトルをそれぞれ $\hat{\boldsymbol{\omega}}$，$\boldsymbol{\omega}_T$ とする．$\hat{\boldsymbol{\omega}}$，$\boldsymbol{\omega}_T$ を $\hat{\Sigma}$ 表示せよ．ここで，$\hat{\Sigma}$ 表示とは，$\hat{\boldsymbol{e}}_1$，$\hat{\boldsymbol{e}}_2$，$\hat{\boldsymbol{e}}_3$ を用いて表すことである．

1－3　$\boldsymbol{L}$ を $\hat{\boldsymbol{\omega}}$，$\omega_s$，$I_1$，$I_3$，$\hat{\boldsymbol{e}}_1$，$\hat{\boldsymbol{e}}_2$，$\hat{\boldsymbol{e}}_3$ のうち必要なものを用いて表せ．

1－4

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}=\sum_{i=1}^{3}\hat{\omega}_i\hat{\boldsymbol{e}}_i=\begin{bmatrix}\hat{\omega}_1\\ \hat{\omega}_2\\ \hat{\omega}_3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}=\sum_{i=1}^{3}M_i\hat{\boldsymbol{e}}_i=\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\end{bmatrix}$$

とする．コマの回転に関する運動方程式を $\hat{\omega}_1$，$\hat{\omega}_2$，$\hat{\omega}_3$，ω_s，I_1，I_3，M_1，M_2，M_3 を用いて表せ．

これ以降では，$0\le\lambda<\pi/2$ とし，コマの回転軸は水平面内に存在する．つまり，$\theta=\pi/2$ であるとする．また，

$$\boldsymbol{M}=M_2\hat{\boldsymbol{e}}_2=\begin{bmatrix}0\\ M_2\\ 0\end{bmatrix}$$

（第1問　つぎのページにつづく）

とする．M_2 はコマの回転軸を水平面内に保つためのモーメントである．さらに，Ω の二次以上の項は小さく，無視できるとする．

1－5　ω_s と ψ の間に成立する関係式を表せ．横軸を ψ，縦軸を ω_s としてグラフを描け．

1－6　コマの回転軸の向き ψ の運動を説明せよ．

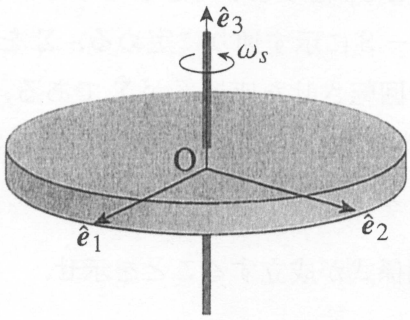

図1－1 コマと座標系 $\hat{\Sigma}$

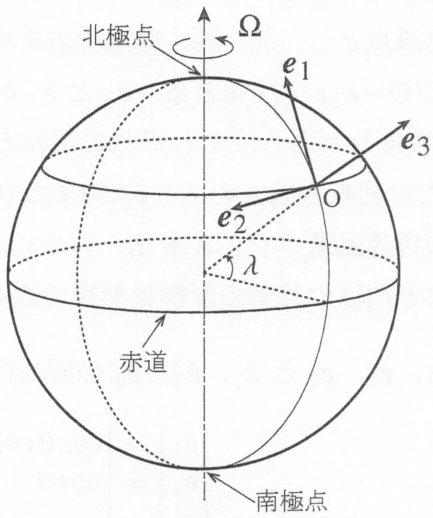

図1－2 地球上の座標系 Σ

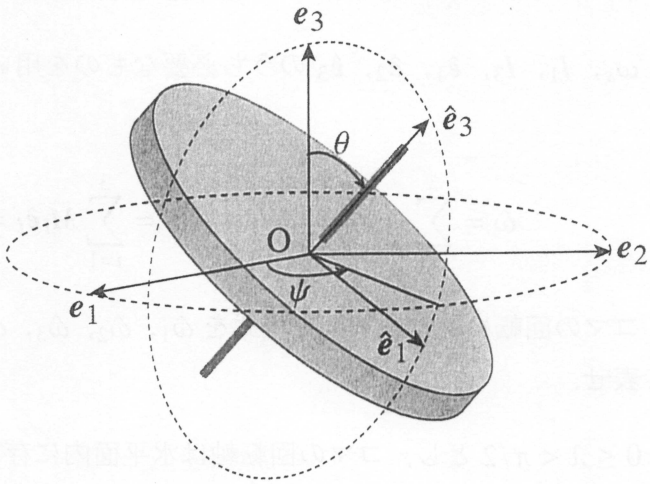

図1－3 座標系 Σ と座標系 $\hat{\Sigma}$

（第1問　おわり）

2．

問い２では，重力と空気抵抗は無視できるものとする．t を時間，ω を角振動数，F_0 を外力の振幅とする．また，変数の上につけたドット（・）は時間微分 d/dt を表す．以下の問いに答えよ．

２－１

図２－１に示すように，質量 m の質点が，ばね定数 k のばねと粘性減衰係数 c のダッシュポットによって，壁に接続された１自由度系の振動を考える．質点は壁に垂直な方向のみに運動し，静止平衡位置からの質点の変位を $x(t)$ とする．変位と外力の正方向は同じとする．また，$\zeta = c/(2\sqrt{mk})$ とする．

（１）　$c = 0$ とし，質点に初期変位 $x(0) = X_0$ ，初速度 $\dot{x}(0) = 0$ を与えて自由振動させたとき，質点の運動方程式を解け．解のみの解答でよい．

（２）　$c = 0$ とし，質点に周期的外力 $f = F_0 \sin \omega t$ を与えて強制振動させたとき，質点の運動方程式の特解を求めよ．ただし，$\omega \neq \sqrt{k/m}$ とする．解のみの解答でよい．

（３）　$0 < \zeta \ll 0.1$ とし，質点に初期変位 $x(0) = X_0$ ，初速度 $\dot{x}(0) = 0$ を与えて自由振動させたときの，$x(t)$ のグラフの概形を描け．ただし，横軸を t ，縦軸を $x(t)$ とせよ．

（４）　$0 < \zeta \ll 0.1$ とし，質点に周期的外力 $f = F_0 \sin \omega t$ を与えて強制振動させたときの，$x(t)$ の定常応答における応答倍率のグラフの概形を描け．ただし，横軸を ω ，縦軸を $x(t)$ の振幅 X と静変位 $X_{st} = F_0/k$ の比 X/X_{st} とせよ．

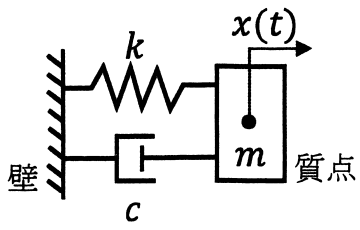

図２－１　１自由度振動系

（第２問　つぎのページにつづく）

２－２

図２－２に示すように，質量 $2m$ の質点１と質量 m の質点２が，ばね定数 k のばねと粘性減衰係数 c_1 ，c_2 のダッシュポットによって，壁に接続された２自由度系の振動を考える．２つの質点は壁に垂直な方向のみに運動するとし，静止平衡位置からの質点１と質点２の変位をそれぞれ $x_1(t)$ ，$x_2(t)$ とする．変位と外力の正方向は同じとする．

（１）　$c_1 = c_2 = 0$ とした系の振動数方程式を導出せよ．

（２）　$c_1 = c_2 = 0$ とした系の固有振動モードを求めよ．ただし，各モード質量が 1 となるように正規化せよ．

（３）　$c_1 = c_2 = 0$ とした系において，１次の固有振動モードのみを考慮し，質点２に周期的外力 $f = F_0 \sin \omega t$ を与えて強制振動させたときの，$x_2(t)$ を求めよ．ただし，解は運動方程式の特解のみとせよ．また，$\omega \neq \omega_1$ ，$\omega \neq \omega_2$ とし，ω_1 と ω_2 $(\omega_1 < \omega_2)$ はそれぞれ $c_1 = c_2 = 0$ とした系の１次と２次の固有振動数とする．

（４）　下記①～③の粘性減衰係数の組み合わせにおいて，変数変換

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = [\Phi] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

を用いて，運動方程式を振動モードごとに独立な方程式に変形できる組み合わせを全て示し，その理由を述べよ．ただし，$[\Phi]$ は問い２－２（２）で求める固有振動モードから作られるマトリクスであり，$c \neq 0$ とする．

①：$c_1 = c_2 = c$ ，②：$c_1 = 2c$，$c_2 = c$ ，③：$c_1 = c$，$c_2 = 2c$

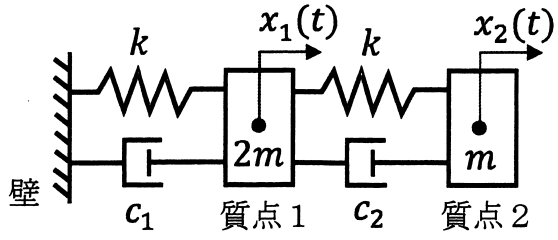

図２－２　２自由度振動系

（第２問　おわり）

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.