2026年8月2日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

# 2027年度大学院修士課程入学試験問題

# 数学

（180点）

## 9:30～11:30

## 問題数 2問

### 注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと.
2．　問題冊子は表紙と白紙の他に4ページある.
3．　問題2問すべてに解答せよ.
4．　落丁・乱丁・印刷不鮮明等があった場合は，すみやかに手を挙げて試験監督者に申し出ること.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

1．

数列 $\{a_n\}$ が，以下の漸化式

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

を満たすとする．ただし，$n$ は任意の非負整数とし，$a_0 = 1$，$a_1 = 0$，$a_2 = 0$ とする．ベクトル

$$\boldsymbol{s}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

1－1

$\boldsymbol{s}_{n+1} = M\boldsymbol{s}_n$ を満たす行列 $M$ を求めよ．

1－2

$M$ の行列式を計算せよ．

1－3

$\boldsymbol{s}_n \neq \boldsymbol{0}$ であることを証明せよ．ただし，$\boldsymbol{0}$ はゼロベクトルである．

1－4

$\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{s}_0$ となる最小の正の整数 $k$ を求めよ．

（第1問　おわり）

2．

以下の問いに答えよ．ただし，$z = x + iy$ は複素数（$i$ は虚数単位）であり，複素平面は $z$ の実部 $x$ を横軸，虚部 $y$ を縦軸とする平面である．

2－1

以下の問いに答えよ．

（1）　複素関数 $f(z) = z^4$ を $f(z) = u + iv$ と表すとき，実部 $u = u(x,y)$ と虚部 $v = v(x,y)$ を求めよ．

（2）　複素関数 $g(z) = u + iv$ が複素平面全体で正則であり，かつ実部 $u = u(x,y)$ が $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ で表されるとき，虚部 $v = v(x,y)$ を求めよ．

（3）　$g(z)$ の導関数 $g'(z)$ を $x$，$y$ を用いて表せ．

2－2

$z$ の共役複素数を $\bar{z}$ で表す．複素平面上で点 $z = 0$，$z = 1$，$z = 1 + i$，$z = i$ を頂点とする正方形の周に沿って，図2－1に示す矢印の向きに1周する積分路 $\Gamma$ 上での積分

$$\int_{\Gamma} (\bar{z})^2 \, dz$$

を計算せよ．

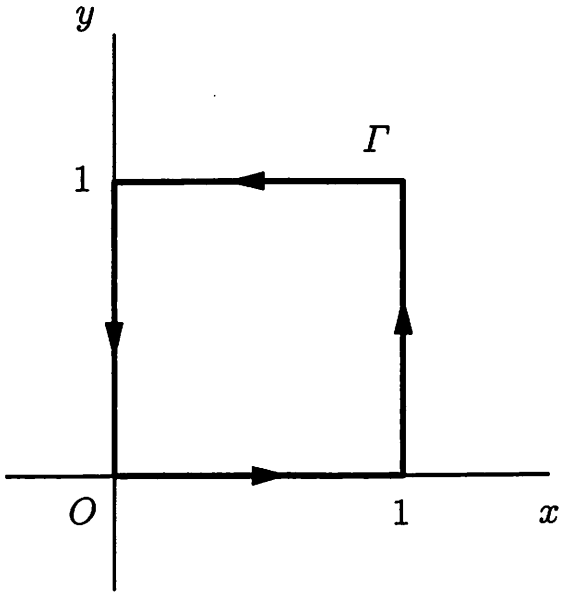


図2－1　複素平面上の積分路 $\Gamma$.

（第2問　つぎのページにつづく）

2－3

複素関数 $h(z)$ が複素平面の実軸および上半面（$y>0$ を満たす領域）を含む領域で正則，かつ $|z|\to\infty$ で $h(z)\to 0$ であるとする．次の関数

$$\frac{h(z)}{z-\omega}, \qquad \text{ただし } \omega \text{ は正の実定数}$$

を，図2－2に示す経路に沿って矢印の向きに 1 周する積分路 $\Gamma$ 上で積分することを考える．ここで，積分路 $\Gamma$ は以下の $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$, $\Gamma_4$ で構成されており，$r$, $R$ はそれぞれ $r>0$, $R>\omega+r$ を満たす実数である．

$\Gamma_1$：実軸に沿って $z=-R$ から $z=\omega-r$ まで

$\Gamma_2$：中心 $z=\omega$，半径 $r$ の上半面側の半円の円弧に沿って $z=\omega-r$ から $z=\omega+r$ まで

$\Gamma_3$：実軸に沿って $z=\omega+r$ から $z=R$ まで

$\Gamma_4$：中心 $z=0$，半径 $R$ の上半面側の半円の円弧に沿って $z=R$ から $z=-R$ まで

以下の問いに答えよ．

（1）　$\Gamma_4$ 上での積分の $R\to\infty$ の極限

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_4}\frac{h(z)}{z-\omega}dz$$

を計算せよ．

（2）　$\Gamma$ 全体で

$$\frac{h(z)}{z-\omega}$$

の積分を考えることによって，コーシーの主値

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(x)}{x-\omega}dx$$

を $h(\omega)$ を用いて表せ．ここで，

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(x)}{x-\omega}dx=\lim_{r\to+0}\left[\int_{-\infty}^{\omega-r}\frac{h(x)}{x-\omega}dx+\int_{\omega+r}^{\infty}\frac{h(x)}{x-\omega}dx\right]$$

である．

（3）　実数 $x$ に対して $h(x)$ を $h(x)=h_1(x)+ih_2(x)$ と表す．ここで，$h_1(x)$ および $h_2(x)$ は実関数である．問い2－3（2）の結果を用いて，$h_1(\omega)$ および $h_2(\omega)$ を $h_1(x)$, $h_2(x)$ を用いた式で表せ．なお，解答の式には，問い2－3（2）に示した式と同様のコーシーの主値をとる積分を含めてもよい．

（第2問　つぎのページにつづく）

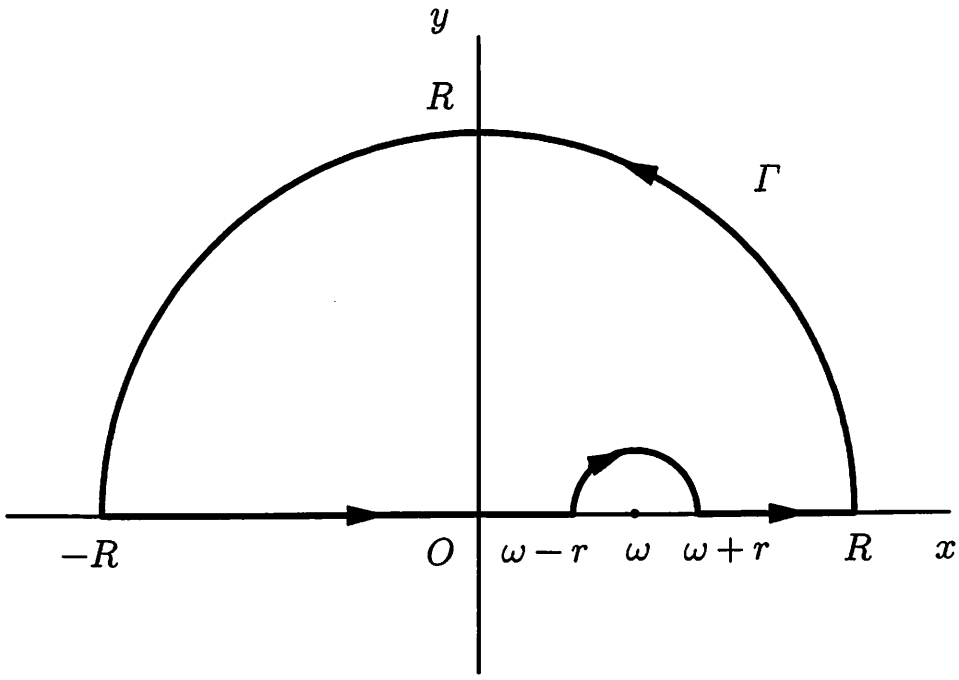


図２－２　複素平面上の積分路 $\Gamma$.

（第２問　おわり）

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.