

2025年8月4日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2026年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

(1問100点 × 問題数4問 = 合計400点)

9:00～12:30

問題数 4問

注意事項

1. 問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと.
2. 問題冊子は表紙と白紙の他に 1 2 ページある.
3. 問題 4 問すべてに解答せよ.
4. 落丁・乱丁・印刷不鮮明等があった場合は, 手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること.

このページは白紙である。

このページは白紙である.

このページは白紙である。

1.

図1-1のように、無限に広い平板が $y = 0$ にあり、これに区切られた半無限空間 ($y > 0$) に、密度 ρ および粘性係数 μ が一定の粘性流体がある。系に外力は働いていない。最初、流体および平板は静止していたが、 $t = 0$ に突然、平板が一定の速度 U で x 方向に運動を始めた。その後の流体の運動を調べよう。広い平板を考えているため、流体の状態は x 方向および紙面に垂直な z 方向には変化しないとする。そこで、流速ベクトルを

$$\boldsymbol{v}(t, y) = (u(t, y), v(t, y), w(t, y)), \quad (1.1)$$

流体の圧力を $p(t, y)$ と表す。以下の問いに答えよ。

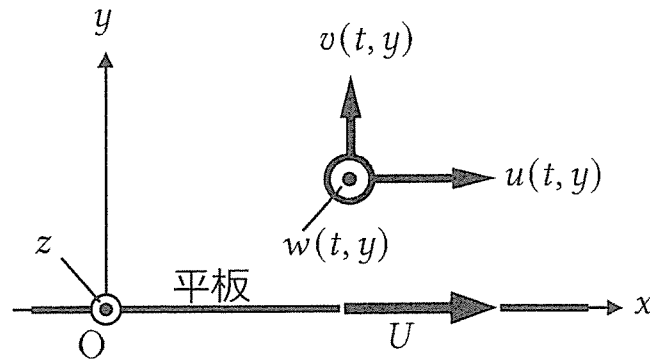


図1-1

1-1

- (1) 密度が一定の流体において、一般に成り立つ連続の式を書け（導出不要）。
- (2) 平板上において、 $v(t, y)$ が満たすべき条件を書け。
- (3) 連続の式および問い1-1(2)の条件に基づいて、 $v(t, y) = 0$ であることを示せ。

1 - 2

図 1 - 1 の流れ場において, 運動量の保存則を考える. 流速ベクトルは第一成分 $u(t, y)$ 以外が 0 であり,

$$\boldsymbol{v}(t, y) = (u(t, y), 0, 0) \quad (1.2)$$

と表されたとする. 図 1 - 2 に示す, 中心 $\boldsymbol{X} = (X, Y, Z)$, 一辺 Δ の立方体状の微小流体要素を考える. 立方体の 6 つの面のうち, 各座標軸に垂直な 2 面について, 座標が大きい面を X^+ , Y^+ , Z^+ , 小さい面を X^- , Y^- , Z^- と名付ける.

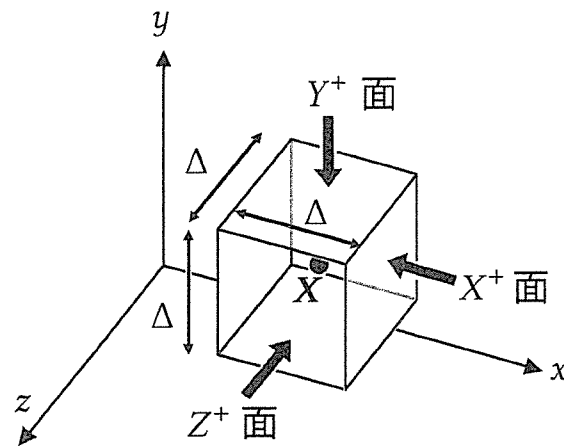


図 1 - 2

- (1) 立方体の表面を通して立方体内部に出入りする流体の持つ運動量は, 立方体内の流体の運動量を変化させない. その理由を 100 文字程度で説明せよ.
(ヒント: 立方体の, どの面を通して流体が出入りするかに注目せよ.)
- (2) 流体では圧力や剪断応力が働き, これらの力が, 立方体内の流体の運動量に影響を与える. Y^+ 面および Y^- 面を通して立方体内の流体に加わる y 方向の力を, それぞれ書け. 次に, y 方向の運動量保存に基づいて, 圧力 p が y に依存しないことを示せ.
- (3) 立方体の各面について, 立方体内の流体に加わる x 方向の力を書け.
- (4) 問い 1 - 2 (3) で述べた力を用いて x 方向の運動量保存を考察し, $u(t, y)$ が以下の方程式に従うことを示せ.

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

1 - 3

$t > 0, y > 0$ の範囲で, u は偏微分方程式 (1.3) を満たす. これを, $t = 0$ における初期条件 $u = 0$ の下で解けばよい.

(1) 式 (1.3) に対する平板上における境界条件を書け.

(2) 一変数関数 $F(\eta)$ を適切に選ぶと,

$$u(t, y) = F(\eta(t, y)), \quad \eta(t, y) = \frac{y}{\sqrt{\mu t / \rho}} \quad (t > 0, y > 0)$$

によって定めた $u(t, y)$ が式 (1.3) を満足する. そのような関数 $F(\eta)$ は, 常微分方程式

$$0 = \frac{d^2 F}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{dF}{d\eta} \quad (1.4)$$

を満たすことを示せ.

(3) 式 (1.4) の一般解を, 誤差関数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds \quad (1.5)$$

を用いて表せ.

(4) 初期条件 $u = 0$ および問い 1 - 3 (1) で述べた境界条件を満たす流速 u を求めよ.

2.

2-1

均質な物質で構成される系について考える. p, T, v, u, s, f はそれぞれ圧力, 温度, 比体積, 比内部エネルギー, 比エントロピー, 比ヘルムホルツ自由エネルギーである.

- (1) 以下の に入る適切な語句あるいは式を答えよ. なお同じ記号の は同じ答えであることを表す.

系に加えられる熱を δq , 系が周囲に作用する仕事を δw とすると, 熱力学第1法則と第2法則は次のように定式化できる.

$$\delta q = du + \delta w \quad (2.1)$$

$$ds \geq \frac{\delta q}{T} \quad (2.2)$$

δq と δw は状態量ではないが, 系の状態が変化するとき, その過程が (ア) であると仮定すれば, δq と δw は p, T, v, s のうち必要なものを用いて, それぞれ

$$\delta q = \text{ (イ) } \quad (2.3)$$

$$\delta w = \text{ (ウ) } \quad (2.4)$$

と表すことができる. このとき式 (2.1) は

$$du = \text{ (イ) } - \text{ (ウ) } \quad (2.5)$$

となる. 比内部エネルギー u と比エントロピー s をともに温度 T と比体積 v の関数とし, さらに式 (2.5) も考慮すると, 以下の2つの偏微分係数は, p, T, v, s のうち必要なものを用いて

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \text{ (エ) } \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = \text{ (オ) } \quad (2.7)$$

と表現できる.

- (2) 理想気体の比内部エネルギーは、温度により一意に定まることを示せ。なお、式(2.5)の熱力学第1法則が、比ヘルムホルツ自由エネルギー f を用いて次式で表されることを用いてもよい。

$$df = -sdT - pdv \quad (2.8)$$

- (3) 容積 V_0 の容器A内に理想気体(気体定数 R [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$])が封入され平衡状態にある。その圧力と温度をそれぞれ p_0 , T_0 とする。容器Aは、同じく容積 V_0 の別の容器Bと細い管を通じて連結されている。ただし初期状態(状態1)では容器B内は真空であり、細い管に設置された弁は閉じられている(図2-1)。
- 弁を開けて十分に時間が経つと、系は新たな平衡状態となった(状態2)。以下の設問に答えよ。なお、この系は外界と物質および熱や仕事のやり取りをしない孤立系である。

- 孤立系の平衡条件を簡潔に説明せよ。
- 状態2における理想気体の温度を求めよ。
- 状態1から状態2への過程での、系のエントロピー変化を求めよ。

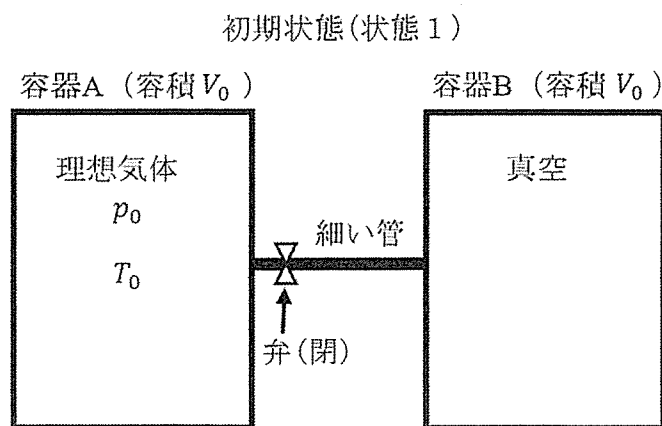


図2-1

次に容器 A から容器 B へ理想気体が流入する過程に注目する．両容器を連結する細い管が先細ノズル（容器 B 側の断面積が小さい）であったとする（図 2－2）．両容器の大きさに比してノズルは十分細く，両容器内の状態はそれぞれ一定とみなせるものとする．系は定常状態にあるとみなせ，ノズル内の流れはノズル軸方向の 1 次元流れとして扱ってよい．簡単のため気体の比熱容量比 γ を一定とし，また重力の影響を無視する．ノズル内の流れは等エントロピー流れであり，可逆断熱過程（ $pv^\gamma = \text{一定}$ ）として扱ってよい．容器 A 内での気体の圧力と比体積を p_1, v_1 とし，また流速は 0（ゼロ）とみなす．先細ノズル出口での圧力は容器 B 内の気体の圧力と同じとし p_2 とする．圧力比 $\phi = p_2/p_1$ を用いてよい（ $0 < \phi < 1$ ）．

圧力比 ϕ が臨界圧力比以下の時，ノズル出口流速はノズル出口における状態の音速で一定となる．一方，圧力比 ϕ が臨界圧力比より大きい時，ノズル出口において流れは亜音速流である．なお温度 T の理想気体の音速は $\sqrt{\gamma RT}$ と書ける．

- (d) 気体の定圧比熱容量を気体定数 R と比熱容量比 γ を用いて表せ．
- (e) 圧力比 ϕ が臨界圧力比より大きい時，ノズル出口での気体の流速を p_1, v_1, γ, ϕ を用いて表せ．
- (f) 臨界圧力比を比熱容量比 γ を用いて表せ．

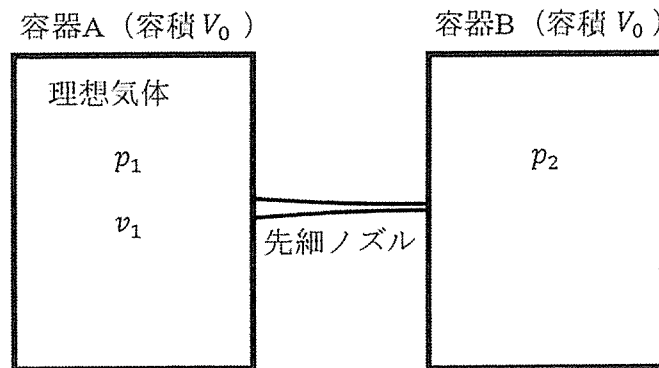


図 2－2

2-2

ある冷媒を用いた冷凍サイクルについて考える。サイクルは定常運転状態にあるとして以下の設問に答えよ。単位がある場合には単位も付せ。

このサイクルが2つの可逆等温過程と2つの可逆断熱過程で構成される逆カルノーサイクルであったとする。湿り蒸気（状態1）が圧縮機で断熱圧縮されて乾き飽和蒸気（状態2）となる。その後、この乾き飽和蒸気は凝縮器を経て飽和液（状態3）になる。さらに状態3の飽和液は膨張機で断熱膨張されて湿り蒸気（状態4）となる。状態4の湿り蒸気は蒸発器を経て状態1の湿り蒸気に戻る。冷媒の低压側での飽和温度は240 K、高压側での飽和温度は320 Kであった。冷媒の飽和蒸気表から得た表2-1に示す情報を適宜用いよ。

表2-1 冷媒の飽和蒸気表

温度 T [K]	飽和液 比エンタルピー h' [kJ kg ⁻¹]	飽和液 比エントロピー s' [kJ kg ⁻¹ K ⁻¹]	乾き飽和蒸気 比エントロピー s'' [kJ kg ⁻¹ K ⁻¹]
240	160	0.90	1.90
320	280	1.30	1.80

- (1) このサイクルの T - s 図を描け。図中には飽和液線、乾き飽和蒸気線も描け。また各状態を1, 2, 3, 4で記せ。
- (2) 状態1の乾き度を求めよ。
- (3) 状態1の比エンタルピーを求めよ。
- (4) 蒸発器で冷媒が受けた冷媒単位質量あたりの熱量を求めよ。
- (5) このサイクルを冷凍機として使用するときのCOP（成績係数）を求めよ。

上記の逆カルノーサイクルの膨張機を膨張弁（絞り）に交換した。この変更により、状態3の飽和液は膨張弁で膨張し、湿り蒸気（状態5）となる。状態5の湿り蒸気は蒸発器を経て状態1の湿り蒸気に戻る。以下、状態1から状態2, 状態3, 状態5を経て状態1に戻るサイクルについて答えよ。

- (6) 状態5の比エンタルピーを求めよ。
- (7) 圧縮機が冷媒単位質量あたりにする仕事を求めよ。
- (8) このサイクルを冷凍機として使用するときのCOPを求めよ。
- (9) 問い(8)で求めたCOPは問い(5)で求めたCOPよりも低い。その理由を簡潔に説明せよ。

3.

3-1

断面形状が一様であり、長さが L 、ヤング率が E 、断面二次モーメントが I のはり AB について、以下の問いに答えよ。ただし、たわみは下方（図 3-1、図 3-2、図 3-3 における y の正方向）を正の方向とし、たわみ角は時計回りに回る方向を正の方向とする。また、はりの変形は微小であるとする。

- (1) 図 3-1 に示すように、右端 B が固定支持された片持ちはり AB に、単位長さあたり w の等分布荷重が作用している。このとき、右端 B の反力 R_B と支点モーメント M_B を求めよ。ただし、図 3-1 に示した方向を R_B と M_B の正の方向とする。また、たわみ角 $\theta(x)$ およびたわみ $\delta(x)$ を左端 A からの距離 x の関数として示せ。

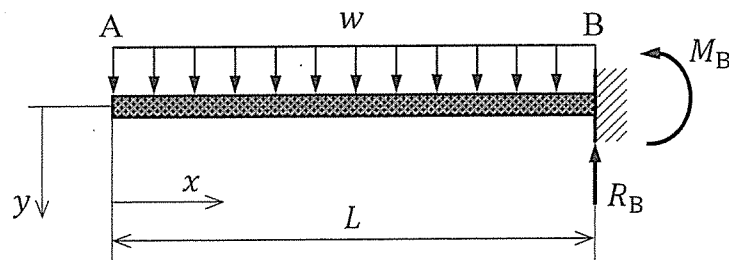


図 3-1

- (2) 図 3-2 に示すように、右端 B が固定支持された片持ちはり AB の左端 A に曲げモーメント M_0 が作用している。このとき、右端 B の反力 R_B と支点モーメント M_B を求めよ。ただし、図 3-2 に示した方向を R_B と M_B の正の方向とする。また、たわみ角 $\theta(x)$ およびたわみ $\delta(x)$ を左端 A からの距離 x の関数として示せ。

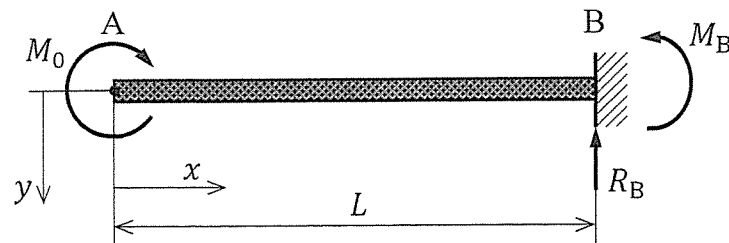


図 3-2

- (3) 図3-3に示すように、右端Bが固定支持された片持ちはりABに、単位長さあたり w の等分布荷重が作用している。左端Aは、 z 軸（紙面に直交する方向）まわりの回転に対して抵抗を示すねじりばねに接合されている。このねじりばねは、はりのA点の並進運動に対しては抵抗を及ぼさないものとする。このねじりばねによって、はりのA点には、たわみ角に比例した曲げモーメントが生じ、その比例係数は k_T である。このとき、A点のたわみ角 θ_A を求めよ。

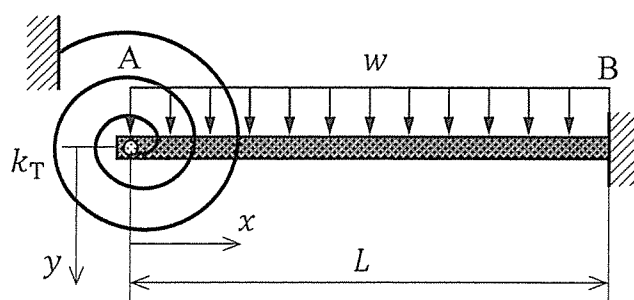


図3-3

3-2

図3-4に示すように、はり1とはり2を接合して組合せはりを作製した。はり1とはり2の界面は完全に接合されている。はり1とはり2について、それぞれの材料のヤング率は E_1, E_2 、線膨張係数は α_1, α_2 （ただし、 $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ ）であり、幅はともに b 、高さはともに h である。組合せはりには外力は作用していない。組合せはりを一様に加熱して温度を ΔT 上昇させると、組合せはりに曲げが生じた。変形前に組合せはりの長手方向（軸方向）の軸線に直交していた横断面は、変形後も平面を保ち、かつ曲がった軸線に対して直交すると仮定する。この組合せはりの変形を解析するため、組合せはりの両端から十分に離れた領域から仮想的に切り出した微小要素を考える。はり1の横断面に生じるすべての内力が軸力 P_1 と曲げモーメント M_1 で表され、はり2の横断面に生じるすべての内力が軸力 P_2 と曲げモーメント M_2 で表されるものとする。ただし、これらの内力は図3-4に示した方向を正の向きとし、 P_1 と P_2 は、それぞれのはりの横断面の中心を通る軸線上に作用するものとする。また、変形したはり1とはり2において、それぞれのはりの横断面の中心を通る軸線の曲率半径は、 h よりも十分に大きく、等しいと仮定する。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 力のつり合いとモーメントのつり合いを考え、 P_1, M_1, P_2, M_2 の間に成り立つ、2つの関係式を示せ。
- (2) 変形したはり1とはり2の曲率半径をともに R とし、内力（ P_1, M_1, P_2, M_2 ）を、それぞれ R を用いて表せ。ただし、 M_1, M_2 を R を用いて表す際には、はり1とはり2がそれぞれ独立したはりであると仮定すること。

以降では、 $E_1 = E_2$ （これを E とする）のときを考える。

- (3) 曲率半径 R を求めよ。
- (4) 内力（ P_1, M_1, P_2, M_2 ）を求めよ。

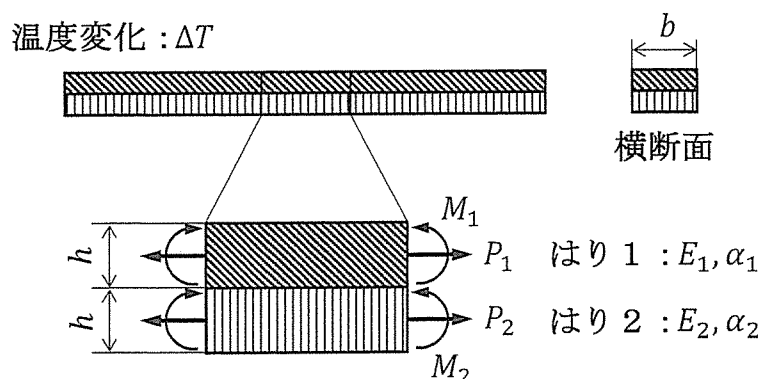


図3-4

4.

図4-1のような構成のフィードバック制御系の設計を考える。また、時間 t の単位は秒とし、ラプラス変換の変数を s 、虚数単位を j とおく。
このとき、以下の問いに答えよ。

4-1

制御対象および制御器の伝達関数を

$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad K(s) = \alpha + \frac{\beta}{s^2 + \gamma}$$

とする。ただし、 α, β, γ は実数の設計パラメータであり、 $\beta \neq 0$ とする。
以下の問いに答えよ。

- (1) 制御系が内部安定となる α, β, γ の条件を示せ。
- (2) 目標値 r から追従誤差 e までの伝達関数 $G_{er}(s)$ を $P(s), K(s)$ によって表せ。
- (3) 制御系が内部安定であり、目標値 r が単位ステップ信号、外乱が $d(t) = 0$ であるとき、追従誤差の最終値 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ を α, β, γ のうち必要なものを使った式で表せ。
- (4) 外乱 d から制御量 y までの伝達関数 $G_{yd}(s)$ を s, α, β, γ のうち必要なものを使った式で表せ。
- (5) 外乱が、ある角周波数 $\omega_0 > 0$ の正弦波 $d(t) = \sin \omega_0 t$ であるとき、外乱に対する制御量 y の応答が $t \rightarrow \infty$ で0に収束するために α, β, γ が満たすべき条件を求めよ。

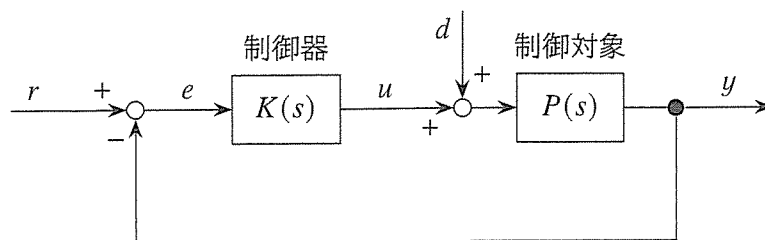


図4-1

4 - 2

制御対象および制御器の伝達関数を

$$P(s) = \frac{1}{s^2(Ts + 1)}, \quad K(s) = K_P(1 + T_D s)$$

とする。ただし、 T は正の時定数であり、 K_P , T_D は実数の設計パラメータである。

以下の問いに答えよ。

(1) $K(s)$ のような伝達関数をもつ制御器の名称を答えよ。

(2) 制御系が内部安定となる K_P , T_D の条件を示せ。

以降の問いでは制御系が内部安定となるように K_P , T_D が選ばれている場合を考える。

また、一巡伝達関数を $L(s) = P(s)K(s)$ とおく。

(3) $L(s)$ のボード線図の概形を描け。ゲイン線図は折れ線近似を用いて描き、各部の傾きを示すこと。また、折れ点の角周波数を T , K_P , T_D のうち必要なものを使った式で示せ。位相線図については -90° , -180° の位置に基準線を描き、低周波および高周波の極限における振る舞いがわかるように描くこと。

以降の問いでは $L(j\omega)$ の位相が最も進む角周波数 ω の値を ω_M とおく。

(4) ω_M を T , K_P , T_D のうち必要なものを使った式で表せ。

(ヒント: $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ である.)

(5) ゲイン交差周波数が ω_M と一致するように K_P を調節したとき、この制御系の位相余裕 PM を T , T_D のうち必要なものを使った式で表せ。式には三角関数の逆関数 $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$ が含まれていても良い。

(6) 非プロパーな伝達関数 $K(s)$ は制御系設計の見通しを良くする上で有用であるが、非プロパーな系を実装することはできない。

そこで実際には、 $K(s)$ に基づいて K_P , T_D を設計したのちに適当な時定数 T_F を定め、

$$\hat{K}(s) = K_P \frac{1 + T_D s}{1 + T_F s}$$

のようなプロパーな伝達関数 $\hat{K}(s)$ をもつ近似制御器を実装する場合が多い。この場合、 $L(s) = P(s)K(s)$ のゲイン交差周波数を ω_{gc} とおいて、 T_F の設計値としてより適切と考えられるものを $\frac{1}{\omega_{gc}}$ または $\frac{1}{20\omega_{gc}}$ から選び、その理由を簡潔に説明せよ。

(第4問 おわり)

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.