

2025年8月3日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2026年度大学院修士課程入学試験問題

数学

(180点)

9:30～11:30

問題数 2問

注意事項

1. 問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと.
2. 問題冊子は表紙と白紙の他に5ページある.
3. 問題 2問すべてに解答せよ.
4. 落丁・乱丁・印刷不鮮明等があった場合は, 手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.

1.

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{41}, a_{42}, a_{43}$ 及び $b_1, \dots, b_4$ を実定数, x_1, x_2, x_3 を実変数とする次の連立方程式の最小 2 乗近似解について考える. 以下の問いに答えよ.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 &= b_4. \end{aligned} \quad (1.1)$$

1 - 1

式 (1.1) の左辺と右辺の差の 2 乗和を次の式で表す.

$$h(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^4 (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 - b_i)^2.$$

(1) $\partial h / \partial x_1, \partial h / \partial x_2, \partial h / \partial x_3$ を求めよ.

(2) 実定数が次の値のとき, h を最小にする x_1, x_2, x_3 を求めよ.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{12} &= 1, & a_{13} &= 1, & b_1 &= 1, \\ a_{21} &= 2, & a_{22} &= 0, & a_{23} &= 1, & b_2 &= 2, \\ a_{31} &= -1, & a_{32} &= 1, & a_{33} &= 1, & b_3 &= 0, \\ a_{41} &= 0, & a_{42} &= 1, & a_{43} &= 1, & b_4 &= 1. \end{aligned}$$

1 - 2

実定数が問い 1 - 1 (2) で与えた値のときの連立方程式を, 行列 A , 列ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ を用いて

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

と表す. このとき連立方程式の左辺と右辺の差の 2 乗和は

$$h = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2, \quad (1.2)$$

と表せる. ただし, $\|\cdot\|$ はベクトルの長さを表す. また, 以下では右上付き文字 T は行列に対しては転置を, ベクトルに対しては列ベクトルと行ベクトルの変換を表す.

- (1) 行列 $A^T A$ を求めよ. また, この行列が正則か否かを示し, 正則な場合は逆行列 $(A^T A)^{-1}$ を求めよ.
- (2) h を最小にする $\mathbf{x}$ を $A, \mathbf{b}$ を用いて表せ. 必要なら次の式を証明無しで用いてよい.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{u}^T F \mathbf{u}) = (F + F^T) \mathbf{u}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{u}^T G \mathbf{v}) = G \mathbf{v}. \quad (1.4)$$

ただし, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ はそれぞれ k, l 次元の実列ベクトル, F, G はそれぞれ k 行 k 列, k 行 l 列の成分がすべて定数である実行列, k, l は 2 以上の自然数である. また, m 次元の実列ベクトル

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

と実関数 $f(\mathbf{y})$ について, $\partial f / \partial \mathbf{y}$ を次のように定義する.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

ただし, m は 2 以上の自然数である.

1 - 3

問い 1 - 2 で定義した連立方程式で, $\mathbf{x}$ の成分に次の制約条件を付ける.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

- (1) ベクトル $\mathbf{x}'$ を

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

とするとき, $\mathbf{x}$ は成分がすべて定数である実列ベクトル $\mathbf{x}_0$ 及び実行列 C を用いて

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + C \mathbf{x}',$$

と表せる. $\mathbf{x}_0, C$ を求めよ.

- (2) h を最小にする x' を A, C, b, x_0 を用いて表せ. 必要なら式 (1.3), (1.4) を証明無しで用いてよい. ただし, h は式 (1.2) で与えられる.
- (3) h を最小にする x_1, x_2, x_3 を求めよ.

2.

以下の問いに答えよ. ただし, 複素平面は xy 平面上の点 (x, y) に複素数 $z = x + iy$ を対応させたものであり ($i = \sqrt{-1}$ は虚数単位), 複素平面上的閉曲線の正の向きとは閉曲線の内部を左手に見て進む向きとする.

2-1

複素平面上的, 自分自身とは交わらない閉曲線 (単一閉曲線) C の上および内部において, 複素数 z の関数 $f(z)$ が 1 個の特異点 $z = z_0$ を除いて正則であるとする ($z = z_0$ は C 内部の点とする). また, $z = z_0$ に関する $f(z)$ のローラン展開が次式で与えられているとする (c_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) はローラン展開の係数である).

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (2.1)$$

- (1) 閉曲線 C_a を $z = z_0$ を中心とする半径 a の円周とする (閉曲線 C_a は閉曲線 C の内部に含まれるとする). このとき, 閉曲線 C_a に関する以下の積分 I_a の値を, 式 (2.1) 右辺の級数を項別に積分することにより求めよ. ただし, 積分 I_a は閉曲線 C_a の正の向きに行うものとする.

$$I_a = \oint_{C_a} f(z) dz$$

- (2) 閉曲線 C に関する以下の積分 I と, 問い 2-1 (1) の積分 I_a の関係を答えよ. また, その関係が成り立つ理由を説明せよ. ただし, 積分 I は閉曲線 C の正の向きに行うものとする.

$$I = \oint_C f(z) dz$$

- (3) 式 (2.1) のローラン展開の係数が $n < -1$ について $c_n = 0$ であるとする. このとき, 以下の極限を求めよ.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

2-2

複素平面において次式で与えられる複素数 z の関数 $f(z)$ を考える. ただし, b は正の実数とする.

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + b^2}$$

- (1) $f(z)$ の特異点をすべて求めよ.
 (2) 問い2-2 (1) で求めた特異点それぞれにおける $f(z)$ の留数を求めよ.
 (3) 図2-1に示す複素平面上の半径 R ($R > b$ とする) の半円周 C_R に関する以下の積分 I_R を考える.

$$I_R = \int_{C_R} f(z) dz$$

このとき,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$$

が成り立つことを示せ. ただし, 積分 I_R は図2-1に示す矢印の通り $z = R$ から $z = -R$ の方向に行うものとする.

- (4) $z = -R$ と $z = R$ を結ぶ実数軸上の線分と半円周 C_R からなる閉曲線に関する $f(z)$ の積分を考えることにより, 以下の実変数の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx$$

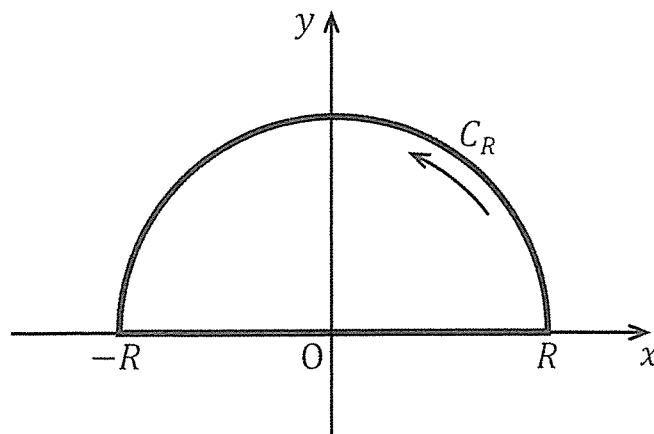


図2-1

このページは白紙である.

このページは白紙である.

このページは白紙である.