

2024年8月7日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2025年度大学院修士課程入学試験問題

## 専門科目

(1問100点 × 問題数4問 = 合計400点)

9:00～12:30

問題数 4問

### 注意事項

1. 問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は表紙と白紙の他に15ページある
3. 問題4問すべてに解答せよ。
4. 落丁・乱丁・印刷不鮮明等があった場合は、手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること。

1.

一様流（流速 $U$ ）により長さ $L$ の平板上に形成される非圧縮性ニュートン流体の層流境界層流れを考える（図1-1）。一様流の主流方向に圧力勾配がなく、境界層は平板の前縁から発達し、流れは二次元定常流であるとする。外力は無視する。座標 $(x, y)$ の原点を平板の前縁とし、主流方向に $x$ 軸、平板の垂直方向に $y$ 軸をとる。境界層内の速度の $(x, y)$ 成分を $(u, v)$ 、境界層厚さを $\delta$ とする。

流体運動の支配方程式である連続の式および運動方程式は以下で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.3)$$

ここで、 $P$ は圧力、 $\rho$ は流体の密度、 $\nu$ は流体の動粘性係数である。

このとき、以下の問いに答えよ。

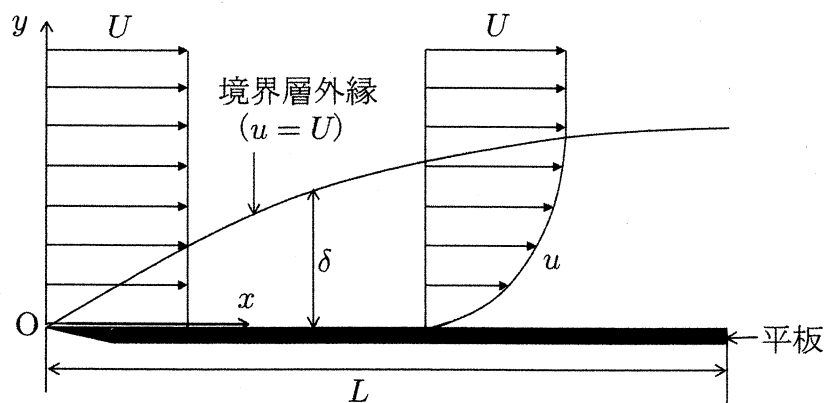


図1-1

(第1問 つぎのページにつづく)

1-1

平板上 ( $y = 0$ ) における速度を 0 とする. このとき, 運動量に関する次の式が成り立つ.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (1.4)$$

ここで,  $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy$  は運動量厚さ,  $\tau_w$  は壁面せん断応力である. 以下の問いに答えよ.

(1) 境界層厚さ  $\delta$  の  $x$  方向変化が非常に小さい ( $d\delta/dx \ll 1$ ) ことを利用して, 運動方程式 (式 (1.2)) における小さなオーダー (桁数) をもつ項を無視する (境界層近似を施す) ことにより,  $u$  に対する境界層方程式を求めよ. 解答は結果だけを書けばよい.

(2) 壁面せん断応力  $\tau_w$  を, 密度  $\rho$ , 動粘性係数  $\nu$ , 粘性係数  $\mu$ , および壁面上における速度勾配

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

の中から必要なものを用いて表せ.

(3) 摩擦速度  $u^*$  を壁面せん断応力  $\tau_w$ , 密度  $\rho$ , 動粘性係数  $\nu$ , 粘性係数  $\mu$  のの中から必要なものを用いて表せ.

(4) 運動量厚さ  $\theta$  の物理的意味を 50 文字程度で説明せよ.

(5) 層流境界層内における  $u$  の  $y$  方向分布が

$$\frac{u}{U} = \left(2 - \frac{y}{\delta}\right) \frac{y}{\delta} \quad (0 \leq y \leq \delta) \quad (1.5)$$

で表されると仮定する. このとき, 式 (1.4) から  $\delta$  の  $x$  に関する微分方程式を求めよ.

(6)  $\delta$  を  $x$  の関数として求めよ. ただし, 平板の前縁 ( $x = 0$ ) において  $\delta = 0$  とする.

1-2

図1-1の平板を多孔質平板に交換し、壁面上のすべての位置で $y$ 方向に一定速度 $-V_0$  ( $< 0$ )で流体の吸い込みを行ったところ、流れが発達し、平板上の位置 $x = x^*$ より下流では $x$ 方向に流速分布が変化しなくなった(図1-2中の $x > x^*$ の領域)。この領域( $x > x^*$ )の流れについて、以下の問いに答えよ。

- (1) 連続の式(式(1.1))より、境界層内の $v$ を求めよ。
- (2) 運動方程式(式(1.2), 式(1.3))を用いて、 $u$ に対する微分方程式を求めよ。
- (3)  $u$ の $y$ 方向分布を求めよ。ただし、平板上( $y = 0$ )において $u = 0$ とする。

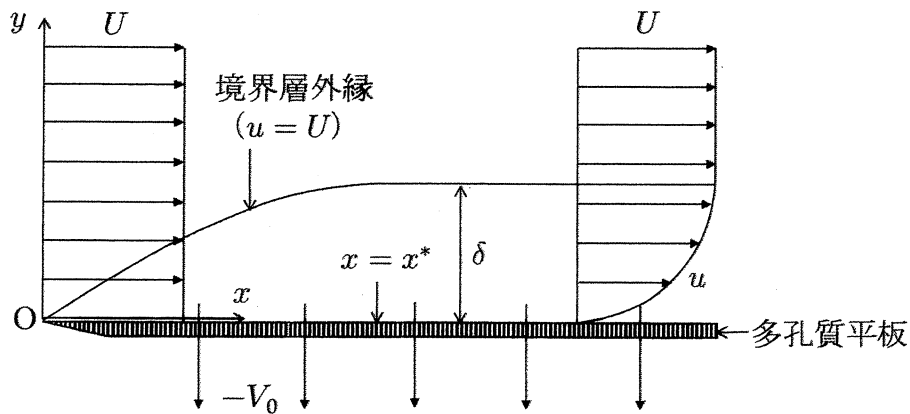


図1-2

(第1問 おわり)

2.

2-1

準静的過程における気体のエントロピー変化について考える。比内部エネルギーを  $u$ 、比エンタルピーを  $h$ 、比エントロピーを  $s$ 、温度を  $T$ 、圧力を  $p$ 、比体積を  $v$  とする。□ は、あてはまる数値または数式を答え、□ は選択肢のうちから適切なものを選べ。なお、同じ記号の □ は同じ答えであることを表す。

(1) 比エンタルピーは、

$$h = u + \square \text{ (ア)} \quad (2.1)$$

と定義される。また、比内部エネルギーの微小変化  $du$  と比エンタルピーの微小変化  $dh$  は、比エントロピーの微小変化  $ds$  を用いて

$$du = \square \text{ (イ)} - p dv \quad (2.2)$$

$$dh = \square \text{ (イ)} + v dp \quad (2.3)$$

と表せる。

また比エントロピーの微小変化  $ds$  は

$$ds = \square \text{ (ウ)} dT + \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp \quad (2.4)$$

と表すことができる。

ここで、マクスウェルの熱力学的関係式より、

$$\left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (2.5)$$

であり、さらに定圧比熱  $c_p$  を用いると式 (2.4) は

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \quad (2.6)$$

となる。

(2) 次に、気体定数  $R$  の単位質量の理想気体を考える。この理想気体の比熱は温度によらず一定であるとする。気体が状態 1 ( $p_1, v_1, T_1$ ) から状態 2 ( $p_2, v_2, T_2$ ) まで変化したときの比エントロピー変化  $\Delta s$  は、

$$\Delta s = c_p \square \text{ (エ)} - R \square \text{ (オ)} \quad (2.7)$$

(第2問 つぎのページにつづく)

と表せる。

また定積比熱を  $c_v$  とし、理想気体におけるマイヤーの関係

$$c_p - c_v = R \quad (2.8)$$

を用いると、式 (2.7) は

$$\Delta s = c_v \boxed{\text{(エ)}} + R \boxed{\text{(カ)}} \quad (2.9)$$

となる。

- (3) ここで図2-1に示すように、2つの異なる種類の理想気体 A, B が厚さが無視できる隔壁によって体積  $V_A$ ,  $V_B$  の部屋に分けられている状況を考える。この初期状態において、気体 A と気体 B は等しい圧力  $p$  と等しい温度  $T$  であるとする。なお、それぞれの気体のモル数を  $n_A$ ,  $n_B$  とする。初期状態から隔壁を静かに取り除くと、それぞれの気体は拡散して最終状態で一様な混合気体になる。理想気体の一般気体定数を  $R_0$  とする。気体の化学反応はなく系は断熱されているとすると、この過程における系のエントロピー変化量  $\Delta S$  は

$$\Delta S = \boxed{\text{(キ)}} \quad (2.10)$$

と表せる。

また、初期状態から最終状態へのこの変化において系全体のエントロピーは、

$\boxed{\text{(ク) 増加する, 変化しない, 減少する}}$

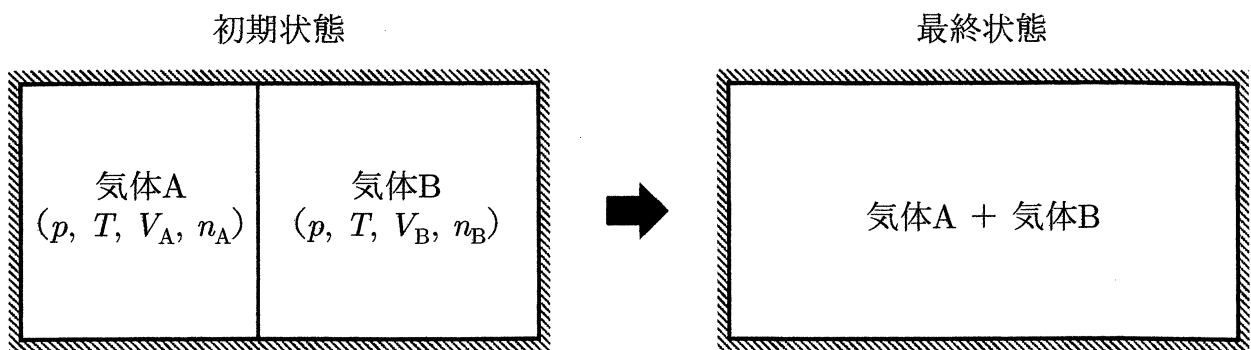


図2-1

2-2

単位質量の理想気体を作動流体とする閉じた系のサイクルを考える。図2-2に示すサイクルの  $p$ - $v$  線図において、状態1から状態2は等積過程、状態2から状態3は等温過程、状態3から状態1は等圧過程であり、すべて準静的過程であるとする。状態  $i$  ( $i=1, 2, 3$ ) における気体の圧力を  $p_i$ 、比体積を  $v_i$ 、温度を  $T_i$  と表す。また、気体定数を  $R$ 、定積比熱を  $c_v$ 、定圧比熱を  $c_p$  とし、この理想気体の比熱は温度によらず一定であるとする。

- (1) 状態2の温度  $T_2$  を  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $T_1$  を用いて表せ。
- (2) 状態2から状態3に変化する過程でこの系が受けた熱量  $q_{23}$  を求めよ。
- (3) この系が外部に対して行う1サイクルあたりの仕事  $w$  を求めよ。
- (4) 状態1から状態2, 状態2から状態3, 状態3から状態1への比エントロピー変化  $\Delta s_{12}$ ,  $\Delta s_{23}$ ,  $\Delta s_{31}$  を  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $R$ ,  $c_v$ ,  $c_p$  の中から必要なものを用いてそれぞれ表せ。
- (5) このサイクルの  $T$ - $s$  線図を描き、描いた図の中に状態1, 2, 3をそれぞれ示せ。

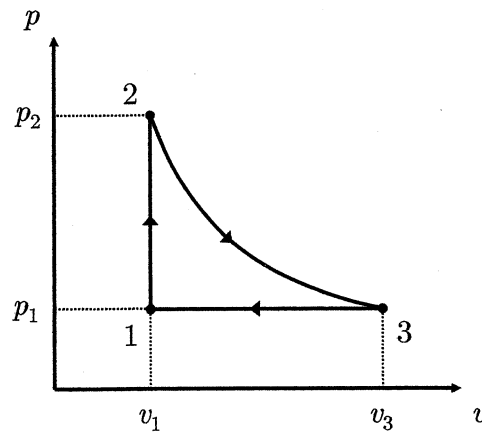


図2-2

(第2問 つぎのページにつづく)

2-3

図2-3に示す開放型ガスタービンを理想化したサイクルについて考える。図2-4は、この理想化したサイクルの  $p-v$  線図であり、状態1から状態2は断熱圧縮過程、状態2から状態3は等圧加熱過程、状態3から状態4は断熱膨張過程、状態4から状態1は等圧冷却過程であり、すべて準静的過程であるとする。作動流体を理想気体であるとして、以下の問いに答えよ。なお状態  $i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) における気体の圧力を  $p_i$ 、比体積を  $v_i$ 、温度を  $T_i$  と表す。気体定数を  $R$ 、定積比熱を  $c_v$ 、定圧比熱を  $c_p$ 、比熱比を  $\kappa$  とする。またこの理想気体の比熱は温度によらず一定であるとする。

- (1) 準静的な断熱過程では  $pv^\kappa = \text{一定}$  となることを示せ。
- (2) 状態2から状態3の過程において、外部から作動流体が受けた単位質量あたりの熱量  $q_{23}$  を求めよ。
- (3) このサイクルの理論熱効率  $\eta$  を温度  $T_1, T_2, T_3, T_4$  を用いて表せ。
- (4) このサイクルで圧縮機において気体がされる仕事  $w_{12}$  とタービンにおいて気体が行う仕事  $w_{34}$  の比を  $\lambda = w_{34}/w_{12}$  とするとき、 $\lambda = T_3/T_2$  となることを示せ。

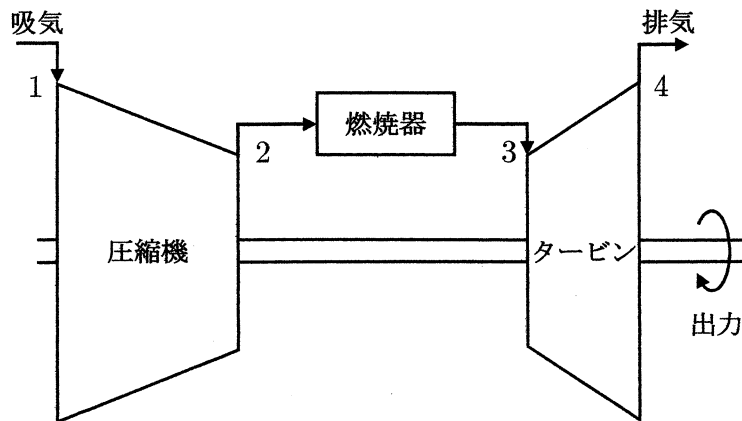


図2-3

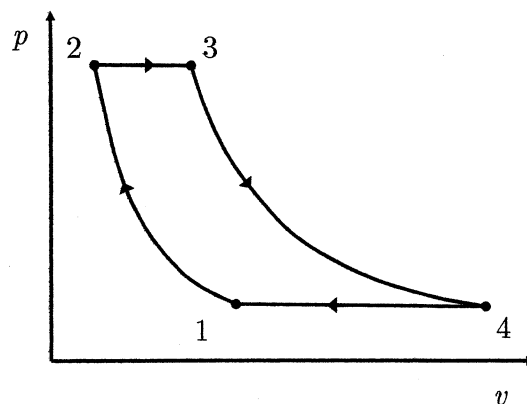


図2-4

(第2問 おわり)



3.

3-1

断面形状と材質が一樣であり、曲げ剛性が  $EI$  で一定である長方形断面の曲りはりに関する以下の問いに答えよ。なお、以下の問いにおいて、次の条件のもとで答えよ。図に示す  $xy$  座標系の原点は任意にとって考えてよい。

- ・はりを構成する部材の中心軸は常に  $xy$  面内にあるものとする。
- ・はりの断面寸法は、はりの長さに比べて十分小さいものとし、はりの変形は曲げモーメントによる変形のみを考えるものとする。
- ・はりの変形は微小であり、 $xy$  面内においてのみ生じるものとする。
- ・はりに物体力は作用しないものとする。

- (1) 図3-1 (a) に示すように、節点 B で直角に折れ曲がった曲りはり ABC の一端 A を壁面に固定した。ここで壁面の外向き法線の方向は  $x$  方向であり、区間 AB の部材の中心軸は  $x$  軸に平行である。曲りはりの区間 AB と区間 BC の長さともに  $L$  であり、節点 B は曲りはりを変形しても曲り角度が変わらない剛節点である。

この曲りはりの他端 C において、 $x$  方向に力  $P$  を加えたとき、以下を求めよ。

- (a) 曲りはりの節点 B における  $y$  方向の変位
  - (b) 曲りはりの点 C における  $x$  方向の変位
  - (c) 曲りはりの点 C における  $xy$  面での反時計回りの傾き角
- (2) 図3-1 (b) に示すように、問い3-1 (1) と同一の曲りはり ABC の他端 C において、今度は力  $P$  の代わりに、 $xy$  面内反時計回りのモーメント  $M$  を作用させたとき、以下を求めよ。
- (a) 曲りはりの点 C における  $x$  方向の変位
  - (b) 曲りはりの点 C における  $xy$  面での反時計回りの傾き角

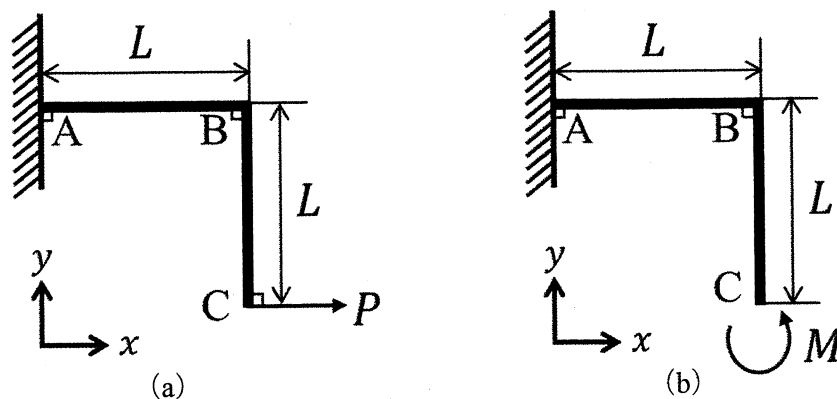


図3-1

(第3問 つぎのページにつづく)

- (3) 図3-2に示すように、節点BおよびDで直角に折れ曲がった曲りはり ABDE の両端 A および E を、壁面に取り付けられた摩擦の無視できるレール上に  $y$  方向の移動を許容するように拘束した（つまり、 $x$  方向の移動と  $xy$  面における回転を拘束した）。ここで壁面の外向き法線方向は  $x$  方向であり、区間 AB と区間 DE の部材の中心軸は  $x$  軸に平行である。曲りはりの区間 AB と区間 DE の長さはともに  $L$  であり、区間 BD の長さは  $2L$  である。節点 B および D は曲りはりが変形しても曲り角度が変わらない剛節点である。

まず、この曲りはりの区間 BD の中点 C において、ばね定数  $k$  ( $k > 0$ ) のばねの一端をつないだ。また、ばねが自然長の状態で、ばねが  $x$  軸に平行になるように、ばねの他端 O を固定した。

次に、ばねの固定端 O の位置を  $\delta_0$  ( $\delta_0 > 0$ ) だけ  $x$  方向にゆっくりと微小変位させたとき、曲りはりの点 C は  $y$  方向には変位せず、 $x$  方向にのみ変位した。この曲りはりの点 C における  $x$  方向の変位を  $\delta_c$  とするとき、変位の比  $\delta_0/\delta_c$  を求めよ。

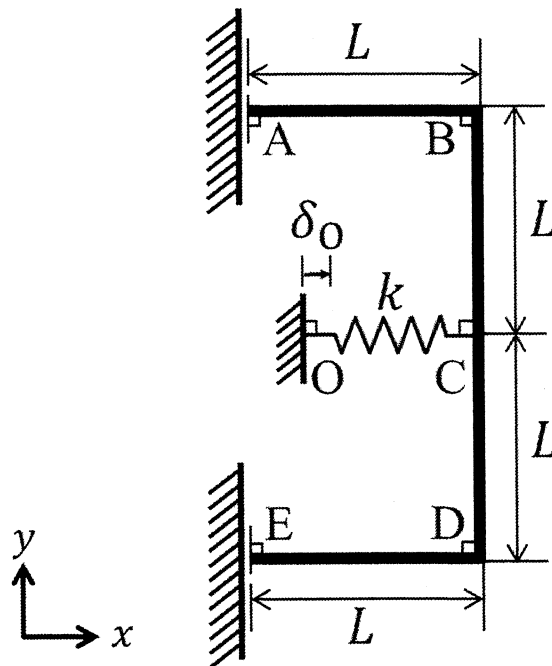


図3-2

3-2

一般に、 $xyz$  直交座標系の  $xy$  面における平面応力状態にある物体においては、図 3-3 に示すように、物体内のある直方体状の微小要素（紙面奥行き方向には一定の厚さを持つ）を考えると、この微小要素の  $xy$  面内で生じる応力状態は、 $x$  方向の垂直応力  $\sigma_x$ 、 $y$  方向の垂直応力  $\sigma_y$ 、および、 $xy$  面におけるせん断応力  $\tau_{xy}$  という 3 つの応力成分によって決まる。

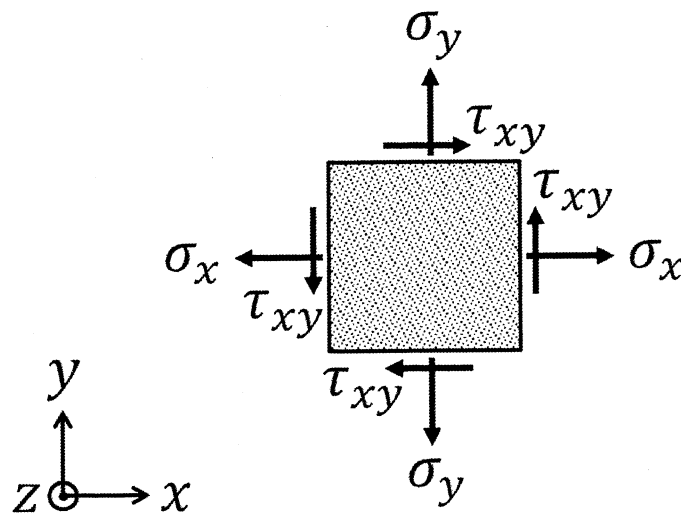


図 3-3

- (1) 物体に生じる主応力と主応力を与える方向について、その特徴を 3 つ挙げ、簡潔な文章で答えよ。

今、一様な等方弾性体の物体が外力を受けており、 $xyz$  直交座標系の  $xy$  面における平面応力状態にある。この物体内のある位置の直方体状の微小要素の  $xy$  面内で生じている応力状態に関して、 $\sigma_x$  と  $\tau_{xy}$  が以下の式 (3. 1) で表された。

$$\sigma_x = \sigma_0, \quad \tau_{xy} = \sqrt{3} \sigma_0 \quad (\sigma_0 > 0) \quad (3. 1)$$

ここで、 $\sigma_0$  は正の実数である。また、物体内のこの位置において、 $xy$  面内での 2 つの主応力のうち大きいほうの主応力を与える方向は、 $x$  軸の正の方向に対して反時計回りに角度  $30^\circ$  だけ回転した方向であった。

この物体の縦弾性係数 (ヤング率) は  $E$  であり、ポアソン比は  $\nu$  である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (2) 物体内のこの位置において、以下を求め、 $\sigma_0$  を用いて表せ。
- $y$  方向の垂直応力  $\sigma_y$
  - $xy$  面内での 2 つの主応力
- (3) 物体内のこの位置にある直方体状の微小要素に生じる体積ひずみを、応力成分 ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  のうちから必要な成分) との関係式を導いたうえで求めよ。なお体積ひずみとは、微小要素の体積変化率を指す。ここで、物体に生じるひずみは微小であり、ひずみ成分に関する 2 次以上の高次項は無視できる。
- (4) 物体に加える外力を準静的に増加させたところ、物体内のこの位置において、応力が外力に比例して増加し、応力がある大きさに達した時点で破壊が起きた。破壊のごく直前 (材料の強度にちょうど達した時点) において、物体内のこの位置で生じていた  $x$  方向の垂直ひずみは  $\varepsilon_c$  ( $\varepsilon_c > 0$ ) と測定された。
- この物体は、任意の方向に対して同じ強度を持つ材料でできており、『物体内に生じる正の主応力が材料の強度  $\sigma_c$  ( $\sigma_c > 0$ ) に達すると破壊が起きる』、という特徴を持つ。
- このとき、この材料の強度  $\sigma_c$  を求めよ。

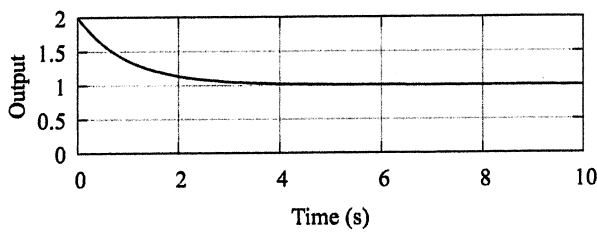
4.

4-1

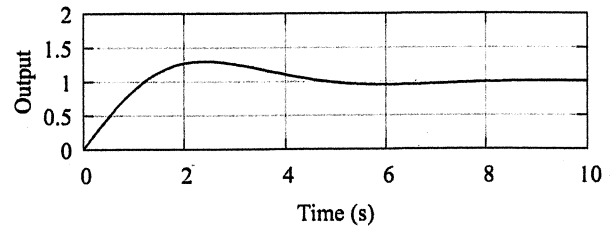
以下の伝達関数  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ ,  $G_3(s)$ ,  $G_4(s)$ ,  $G_5(s)$  に対応する単位ステップ応答図とボード線図（ゲイン曲線）をそれぞれ図4-1, 4-2より選べ。解答は「 $G_1(s)$ -(A)-(1)」のように書くこと。また、それぞれの選択理由を詳細に記すこと。

$$G_1(s) = \frac{1}{2s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s^2+2s+1}, \quad G_3(s) = \frac{1}{s^2+s+1},$$

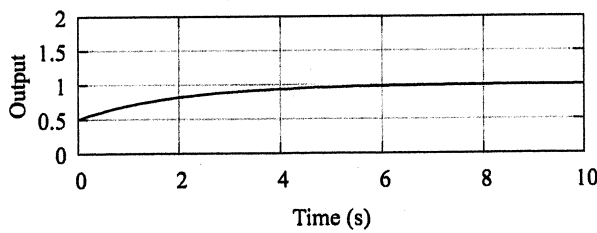
$$G_4(s) = \frac{s+1}{2s+1}, \quad G_5(s) = \frac{2s+1}{s+1}$$



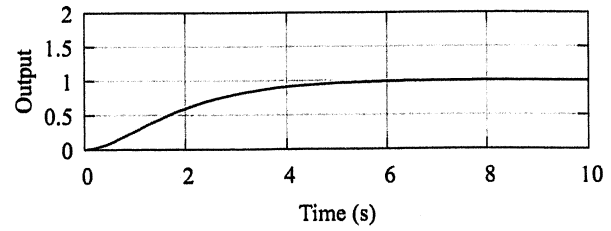
(A)



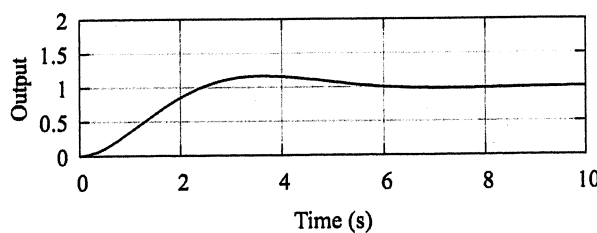
(B)



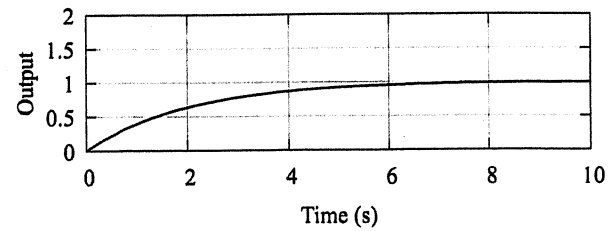
(C)



(D)



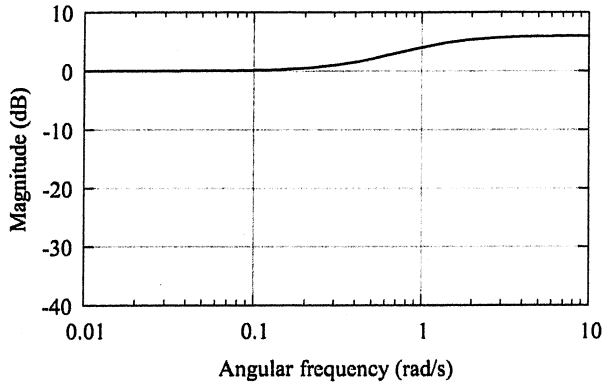
(E)



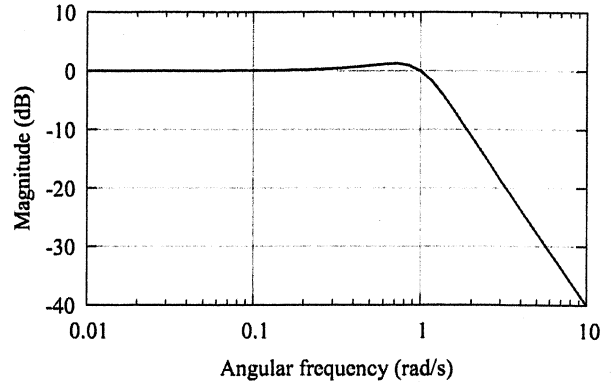
(F)

図4-1 単位ステップ応答図

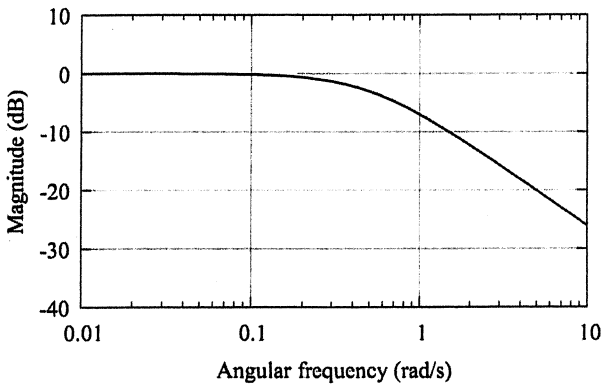
(第4問 つぎのページにつづく)



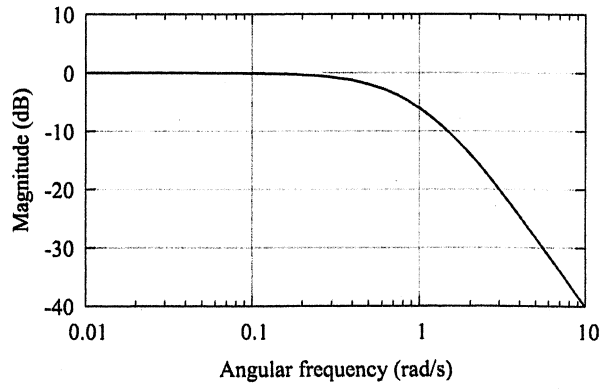
(1)



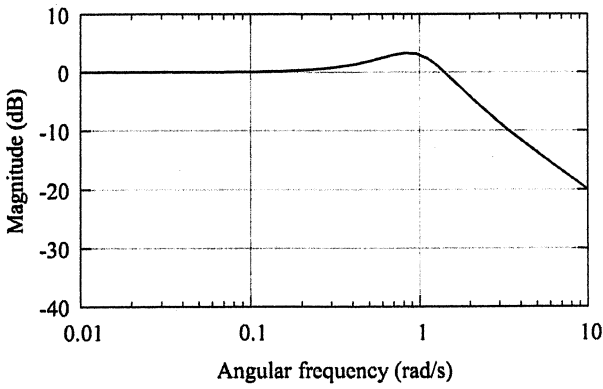
(2)



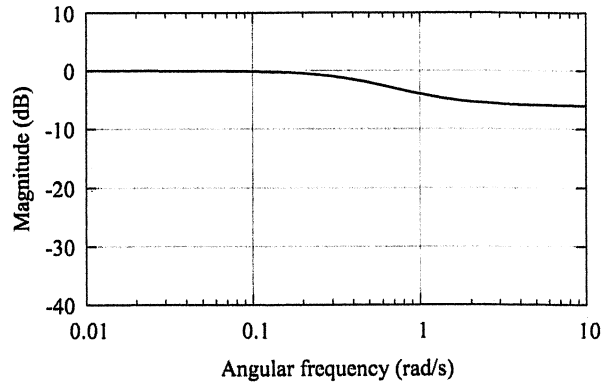
(3)



(4)



(5)



(6)

図4-2 ボード線図 (ゲイン曲線)

(第4問 つぎのページにつづく)

4 - 2

図4-3に示すブロック線図で表されたシステムを考える。ここで、 $c$ 、 $k_1$ 、 $k_2$ は正の定数である。入力 $U$ から $X_1$ および $X_2$ への伝達関数をそれぞれ $G_{X_1}(s)$ 、 $G_{X_2}(s)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)  $G_{X_1}(s)$ 、 $G_{X_2}(s)$ を求めよ。

入力 $U$ を角振動数 $\omega$ の正弦波とする。ここで、角振動数 $\omega$ は一定である。

(2)  $G_{X_1}(s)$ のゲインが $-\infty(\text{dB})$ となるときの角振動数 $\omega < \infty$ を求めよ。

(3) 問い4-2(2)で求めた角振動数 $\omega$ のときの $G_{X_2}(s)$ のゲインおよび位相差を求めよ。

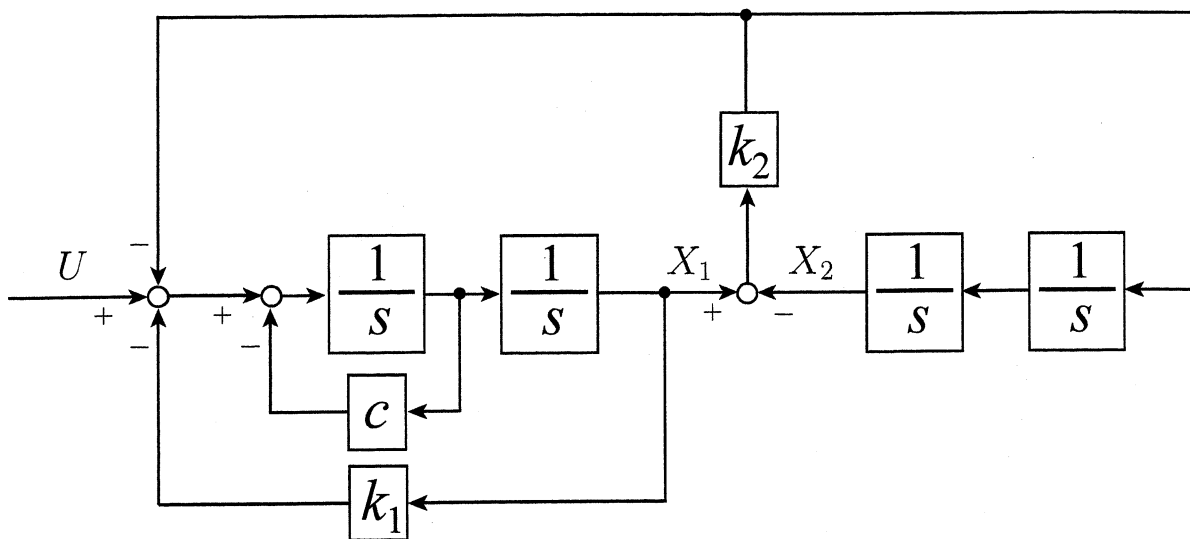


図4-3

4 - 3

図4-4に示すフィードバック系を考える.  $G(s)$ ,  $C(s)$  はそれぞれ制御対象, 補償器の伝達関数であり,

$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)}$$

$$C(s) = k$$

である.  $0 < a < b$ ,  $k \neq 0$  である. このフィードバック系が不安定極をもつ条件と, そのときの不安定極の個数を示せ. ここで, 不安定極とはその実部が正である極である.

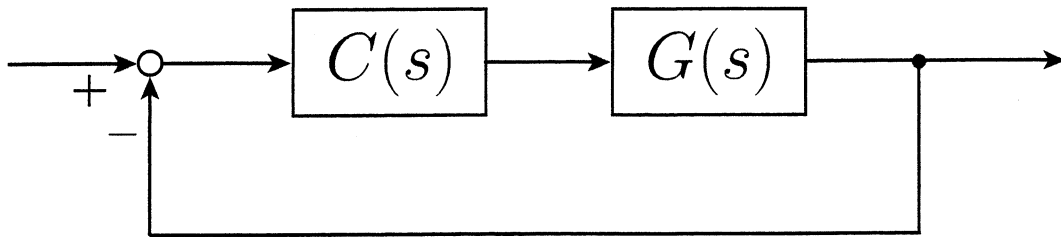


図4-4