2024年8月6日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2025年度大学院修士課程入学試験問題

機械力学

（150点）

13:00～14:30

問題数 2問

注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと．
2．　問題冊子は表紙と白紙の他に6ページある．
3．　問題2問すべてに解答せよ．
4．　落丁・乱丁・印刷不鮮明等があった場合は，手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること．

1．

1－1

以下の問いに答えよ．

（1）　半径が r，質量が m の均質な円板を考える．この円板は剛体であり，厚みは無視できる．円板の中心を通り，円板を含む面に垂直な軸まわりの慣性モーメントを求めよ．

（2）　図1－1に示すような，外半径が r，内半径が a，質量が m の均質な円環を考える．この円環は剛体であり，厚みは無視できる．円環の中心を通り，円環を含む面に垂直な軸まわりの慣性モーメントを求めよ．

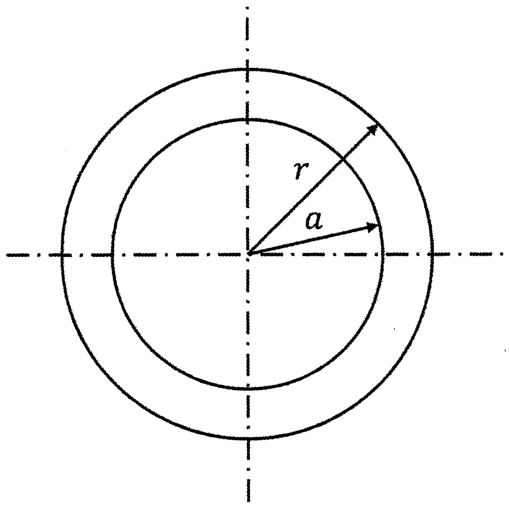

図1－1

（第1問　つぎのページにつづく）

１－２

問い１－１（２）で定義した円環Ａが，床に固定された円柱Ｂの上を滑らずに転がる運動を考える．ただし，転がり摩擦は無いものとする．円柱Ｂは剛体で，半径 R（$R > r$）の直円柱である．図１－２に示す通り，円柱Ｂの中心軸に垂直な断面に xy 座標を定義し，座標の原点 O を円柱Ｂの中心軸上に取る．円環Ａの運動は，この平面内に限られているとし，円環Ａの重心の座標を (x, y) とする．また，y 軸に対する円環Ａの回転角を φ とする．重力加速度 g の向きは y 軸の負の向きとする．

円環 A の運動の初期条件が $(x, y) = (0, R + r)$，$(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$，$\varphi = 0$，$\dot{\varphi} = 0$ となるように円環Ａを円柱Ｂの上に置いたところ，図１－２のように x が正の方向に向かって静かに転がり始めた．円環Ａは円柱Ｂの表面をしばらく転がった後，円柱Ｂの表面から離れる．円環Ａが円柱Ｂの表面から離れる瞬間の円環Ａの重心の位置を $(x, y) = (x_d, y_d)$ とする．ここでは，ラグランジュの未定乗数法を用いて，y_d を求めることを考える．ただし，原点 O の高さをポテンシャルエネルギーの基準面とする．円環Ａは円柱Ｂの表面から離れるまでの間に床に触れることはない．また，時間微分を示す記号としてドット（・）を変数の上に用いてよい．以下の問いに答えよ．

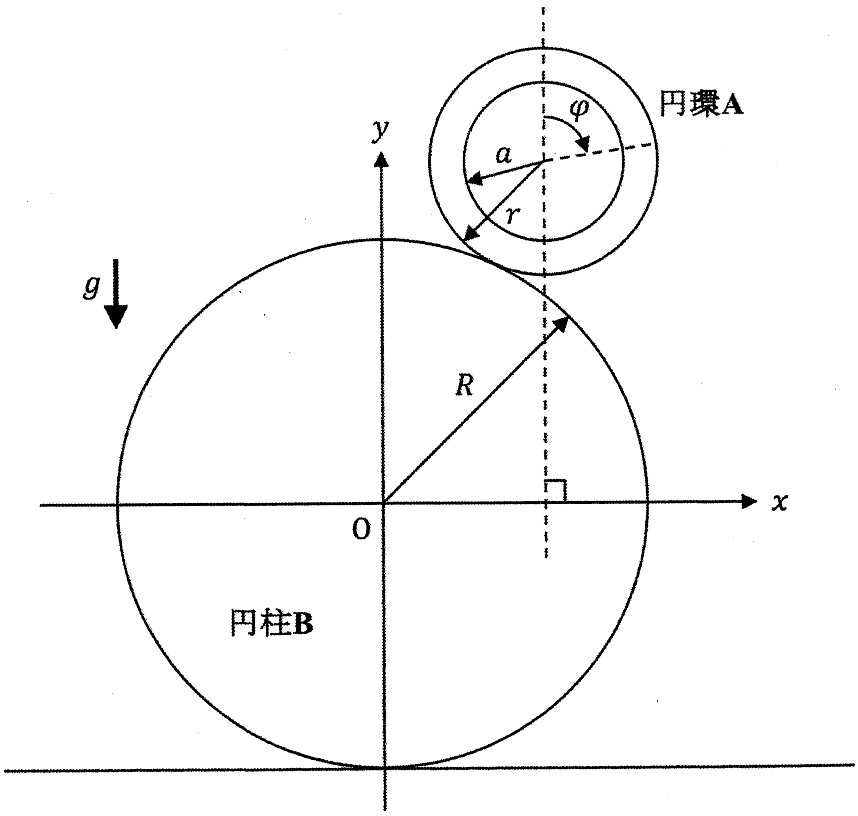

図１－２

まずは円環 A が円柱 B の上を転がるという拘束を一旦無視して考える．

（１）　円環 A の運動に関するラグランジアン L を示せ．

（２）　円環 A の運動の初期条件を考慮して，円環 A のエネルギー保存の式を示せ．

ここからは，円柱 B から離れるまでの円環 A の運動に課される幾何学的な拘束を考える．

（３）　問い１－２（１）で求めた式を用いて，円環 A に働く拘束力の x 方向成分 N_x および y 方向成分 N_y を求めよ．

（４）　円柱 B を離れるまでの間，円環 A の重心は原点 O から一定の距離を保って運動する．この条件から x と y の間に成り立つ拘束条件の式 $f_1 = 0$ を求めよ．

（５）　円環 A が円柱 B の上を滑らずに転がるという条件から，φ，x，y の間に成り立つ拘束条件の式 $f_2 = 0$ を求めよ．

（６）　$f_1 = 0$，$f_2 = 0$ に対するラグランジュの未定乗数をそれぞれ λ_1，λ_2 とする．N_x および N_y を，問い１－２（３）と異なる表式で，λ_1，λ_2 を用いて表せ．

（７）　$y = y_d$ のときに，N_x，N_y，x_d，y_d の間に成り立つ式を示せ．

（８）　$y = y_d$ のときの λ_1 の値を求めよ．

（９）　$\dot{\varphi}^2$ を $\dot{x}$ および $\dot{y}$ を用いて表せ．

（１０）y_d の値を求めよ．

（１１）円環 A が，質量が m で半径方向の幅が無限に狭い半径 r の円環 C であった場合と，質量が m で穴が空いていない半径 r の円板 D であった場合を考える．円環 C と円板 D はいずれも厚みの無視できる均質な剛体である．これらの円環 C と円板 D のうち，どちらがより高い位置で円柱 B から離れるか，理由をつけて答えよ．

（第１問　おわり）

2．

2－1

図２－１に示すように，変形せず質量が無視できる棒からなる２つの単振り子が，質量が無視できるばね定数kのばねにより接続された振動系を考える．いずれの単振り子についても，長さはl，下端の質点の質量はmであり，振り子の支点からばねが棒に接続されている位置までの距離はhとする．鉛直下方からのそれぞれの振り子の振れ角はθ_1およびθ_2とする．２つの振り子の支点間の距離はばねの自然長に等しく，θ_1およびθ_2が十分小さいため，ばねは常に水平であると考えることとする．すべての運動において，可動部の摩擦や空気の抵抗は無視できるものとし，重力加速度gの働く場における紙面内での微小振動について考える．解答において，時間微分を示す記号としてドット（・）を変数の上に用いてよい．

（１）　この系の運動エネルギーTおよびポテンシャルエネルギーUを求めよ．なお，$\theta_1 = \theta_2 = 0$のときをポテンシャルエネルギーの基準とし，θ_1，θ_2について微小近似することなく導出せよ．

（２）　θ_1，θ_2について二次の微小項までをとり，ラグランジアンLを求めよ．

（３）　θ_1およびθ_2に関する運動方程式を求めよ．

（４）　問い２－１（３）より，$\theta_1 = A\sin(\omega t + \varphi)$および$\theta_2 = B\sin(\omega t + \varphi)$とおき，系の固有角振動数を求めよ．

（５）　θ_1およびθ_2の一般解を求め，どのような振動か説明せよ．

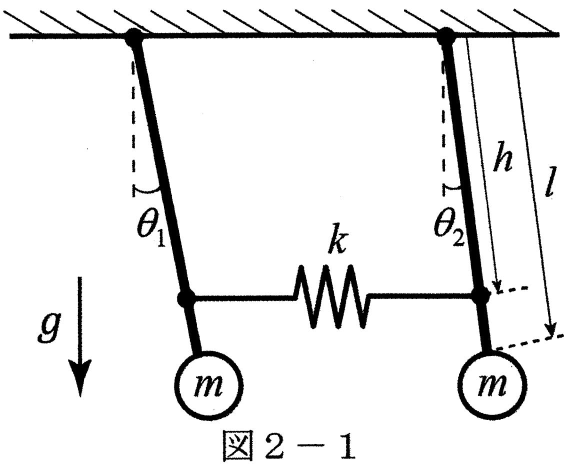

図２－１

（第２問　つぎのページにつづく）

２－２

図２－２に示すように，質量Mの棒の両端を支点として２つの単振り子が付いており，この棒が両端に付いた長さl_1のひもにより天井の支点に固定された振動系を考える．このひもは質量が無視できて，たるまないものとする．天井の支点間の距離は棒の長さに等しく，それぞれの支点を中心とした鉛直下方からのひもの振れ角はともにθ_1である．２つの単振り子の長さはl_2，下端の質点の質量はいずれもmであり，それぞれの鉛直下方からの振れ角はθ_2およびθ_3である．すべての運動において，可動部の摩擦や空気の抵抗は無視できるものとし，重力加速度gの働く場における紙面内での微小振動について考える．解答において，時間微分を示す記号としてドット（・）を変数の上に用いてよい．

（１）　この系の運動エネルギーTを求めよ．ここでは，θ_1，θ_2，θ_3について微小近似することなく導出せよ．

（２）　この系のポテンシャルエネルギーUを求めよ．ここでは，$\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$のときをポテンシャルエネルギーの基準とし，$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3$について微小近似することなく導出せよ．

（３）　問い２－２（１）および問い２－２（２）の結果について，θ_1，$\dot{\theta}_1$，θ_2，$\dot{\theta}_2$，θ_3，$\dot{\theta}_3$の二次の微小項までをとり，θ_1，θ_2，θ_3に関する運動方程式を求めよ．

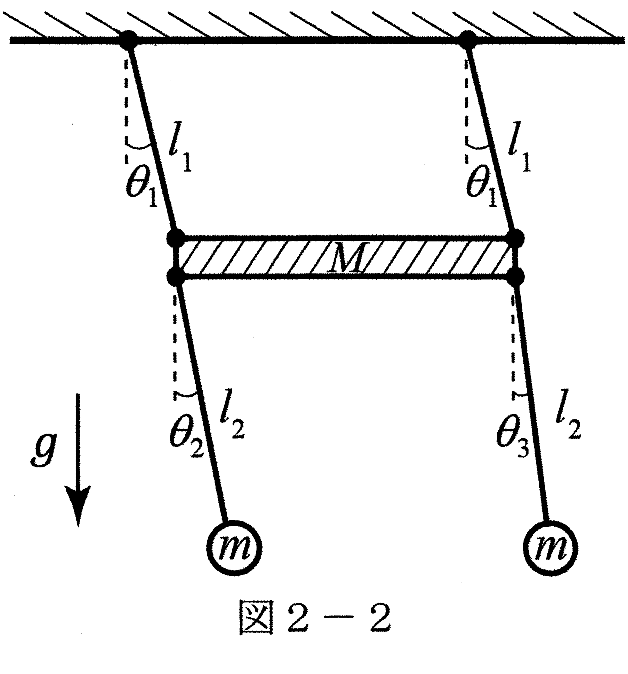

図２－２

（第２問　つぎのページにつづく）

（4）　$\theta_1 = A\cos(\omega t + \alpha)$，$\theta_2 + \theta_3 = C\cos(\omega t + \alpha)$とおき，固有角振動数 ω の2つの解 ω_1 および ω_2 を与える式を示せ.

（5）　$\theta_2 - \theta_3 = B\cos(\varphi t + \beta)$とおき，固有角振動数を求めよ.

（6）　固有角振動数 φ，ω_1，ω_2 を用いてθ_1，θ_2，θ_3の一般解を示せ.

（7）　$M \gg m$のときのθ_1を求め，系全体がどのような振動になるか説明せよ.

（第２問　おわり）