2024年8月6日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2025年度大学院修士課程入学試験問題

数学

（180点）

9:30～11:30

問題数 3問

注意事項

１．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと．
２．　問題冊子は表紙と白紙の他に４ページある．
３．　問題３問すべてに解答せよ．
４．　落丁・乱丁・印刷不鮮明等があった場合は，手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること．

1．

実変数 t（ただし，$t \geq 0$）についての実関数 $x(t)$，$y(t)$ が次の微分方程式に従うものとする．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - \omega y - x(x^2 + y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = \omega x + ay - y(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで，a は実定数，ω は正の実定数である．

1－1

式（1.1）から非線形項を除いた微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - \omega y \\ \dfrac{dy}{dt} = \omega x + ay \end{cases} \tag{1.2}$$

を考える．初期条件は

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \tag{1.3}$$

とする．ただし，$(x_0,\ y_0) \neq (0,\ 0)$ とし，式（1.2）の定常解 $x = y = 0$ 以外の解について考える．

（1）式（1.2）から $y(t)$ を消去することによって，$x(t)$ が次の微分方程式に従うことを示せ．

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (a^2 + \omega^2)x = 0 \tag{1.4}$$

（2）式（1.3）の初期条件のもとで，式（1.2）の解 $x(t)$，$y(t)$ を求めよ．

（3）式（1.2）の解 $(x(t),\ y(t))$ の軌跡（$t \geq 0$）の概形を xy 平面に描画し，xy 平面における解の振る舞いを簡潔な文章で説明せよ．解答は $a > 0$，$a = 0$，$a < 0$ のそれぞれの場合について示すこと．

1－2

式（1.1）の定常解 $x = y = 0$ 以外の解について考える．式（1.1）に対し，

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad (1.5)$$

（ただし，$r > 0$）とおくことで，実関数 $r(t)$，$\theta(t)$ に対する微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \boxed{\text{ア}} & (1.6) \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \boxed{\text{イ}} & (1.7) \end{cases}$$

が得られる．初期条件は

$$r(0) = r_0(> 0), \quad \theta(0) = \theta_0 \qquad (1.8)$$

とする．

（1）$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に入る数式を求めよ．

（2）式（1.8）の初期条件のもとで，式（1.7）の解 $\theta(t)$ を求めよ．

（3）$t \to \infty$ のとき $r(t)$ が収束するか否かを，$\dfrac{dr}{dt}$ の正負に着目して説明せよ．また，収束する場合にはその極限値を答えよ．

（4）式（1.1）の解 $(x(t), y(t))$ の軌跡（$t \geq 0$）の概形を xy 平面に描画し，xy 平面における解の振る舞いを簡潔な文章で説明せよ．解答は $a > 0$，$a = 0$，$a < 0$ のそれぞれの場合について示すこと．

（5）式（1.6）に対し，

$$s = r^{-2} \qquad (1.9)$$

とおくことで，実関数 $s(t)$ に対する線形の微分方程式が得られる．このことを用いて，式（1.8）の初期条件のもとで，式（1.6）の解 $r(t)$ を求めよ．

（第1問　おわり）

2．

正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

とする．任意の正方行列 B の行列式を $\det B$ と表記する．以下の問いに答えよ．

2－1　$\det A$ を答えよ．

2－2　行列 A の固有値を答えよ．

2－3　n を正の整数として，行列 A^n を 3×3 の行列の形で答えよ．

2－4　n を正の整数として，$\det(A^n)$ を答えよ．

（第２問　おわり）

3．

n を正の整数とする．実定数 a_0，a_n，b_n を用いて，2π を周期とする連続な実関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{3.1}$$

のようにフーリエ級数に展開することを考える．以下の問いに答えよ．

3－1　m を負でない整数として，以下の積分結果を答えよ．

$$(1)\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx dx, \qquad (2)\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx dx \tag{3.2}$$

3－2　$f(x)$ を，2π を周期とする次の関数

$$f(x)=x^2 \quad (-\pi\le x<\pi), \quad f(x+2\pi)=f(x) \tag{3.3}$$

とする．この関数をフーリエ級数に展開する際の a_0，a_n，b_n を答えよ．

3－3　式（3.3）の $f(x)$ のフーリエ級数展開の結果を利用して，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \tag{3.4}$$

の値を答えよ．

（第３問　おわり）