

2023年8月7日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

**2024年度大学院修士課程入学試験問題**

**専門科目**

(1問100点 × 問題数4問 = 合計400点)

9:00～12:30

**問題数 4問**

**注意事項**

1. 問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 問題4問すべてに解答せよ。
3. 万一落丁を見つけた場合には、手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること。

1.

半径  $R$  の十分に長いまっすぐな円筒内に、密度が一定の非圧縮粘性流体が圧力差により流れしており、その一部の長さ  $L$  の円筒部（図 1-1）に着目する。半径方向、周方向、軸方向にそれぞれ  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  座標をとる。 $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  方向の流速成分を  $v_r$ ,  $v_\theta$ ,  $v_z$ , 圧力を  $P$  とし、重力等の外力を無視する。また、この円筒部の上流および下流における圧力をそれぞれ  $P_0$ ,  $P_L$  ( $P_0 > P_L$ ) とし、それらの値は  $z$  軸に垂直な断面内で一様とする。円筒部内の流れは十分に発達しており ( $v_z$  は  $z$  に依存しない),  $v_r=0$ ,  $v_\theta=0$  の定常な軸対称の層流であるとする。

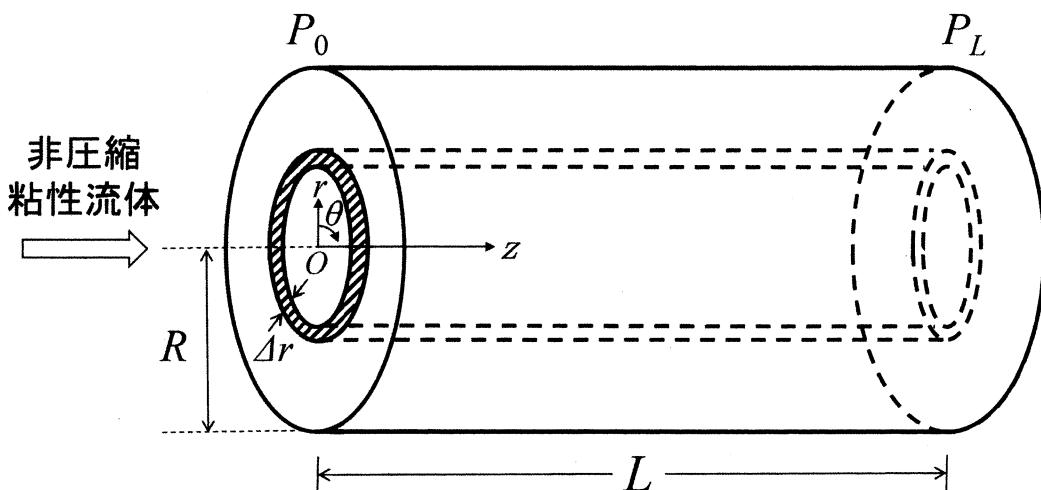


図 1-1

1-1

図 1-1 の流体に働く力のつり合いに関する以下の問いに答えよ。

- (1) 図中の斜線を描いた内半径  $r$ , 厚さ  $\Delta r$  の円環を断面とする長さ  $L$  の中空円筒の領域に着目し,  $z$  方向の力のつり合いから次式を導け。

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \frac{(P_0 - P_L)}{L} r$$

ただし,  $r$  方向に垂直な面上で  $z$  方向に働くせん断応力を  $\tau_{rz}$  と表記し, 中空円筒の内側面に働く  $z$  方向正の向きの  $\tau_{rz}$  を正とする。また,  $\tau_{rz}$  は  $z$  に依存しないものとする。

- (2) 問い 1-1 (1) で与えた式を適切な境界条件の下で解くことにより,  $\tau_{rz}$  の  $r$  方向分布を表す式を求めよ。また,  $\tau_{rz}$  と  $r$  の関係を図示せよ。なお, 図は,  $\tau_{rz}$  を縦軸,  $r$  を横軸とせよ。

## 1 - 2

図1-1の流体がニュートン流体であると仮定する。このとき、 $v_z$ の $r$ 方向分布を表す式を求めよ。ただし、ニュートン流体の $\tau_{rz}$ は下式で与えられるものとする。

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$$

ここで、 $\tau_{rz}$ の定義は問い合わせ1-1と同様とする。また、 $\mu$ は流体の粘性係数であり、正の定数とする。

## 1 - 3

図1-1の流体が非ニュートン流体の一種であるビンガム流体であると仮定する。以下の問い合わせに答えよ。

- (1) ビンガム流体の $\tau_{rz}$ と $\frac{dv_z}{dr}$ には以下の関係がある。

$$0 \leq \tau_{rz} \leq \tau_0 \text{ の場合 : } \frac{dv_z}{dr} = 0$$

$$\tau_{rz} \geq \tau_0 \text{ の場合 : } \tau_{rz} = -\mu_B \frac{dv_z}{dr} + \tau_0$$

ここで、 $\tau_{rz}$ の定義は問い合わせ1-1と同様とする。また、 $\mu_B$ は定数であり、その値は問い合わせ1-2の $\mu$ の値と等しいものとする。 $\tau_0$ は正の定数である。このとき、ビンガム流

体の $\tau_{rz}$ と $-\frac{dv_z}{dr}$ の関係を、ニュートン流体と比較して図示せよ。なお、図は、 $\tau_{rz}$ を縦

軸、 $-\frac{dv_z}{dr}$ を横軸とせよ。

- (2)  $\tau_{rz} = \tau_0$ となる半径 $r_0$ を $\tau_0$ 、 $P_0$ 、 $P_L$ 、 $L$ を用いて表せ。ただし、 $r_0 \leq R$ とする。
- (3)  $v_z$ の $r$ 方向分布を表す式を、 $0 \leq r \leq r_0$ と $r_0 \leq r \leq R$ の場合に分けて求めよ。ただし、式は $\tau_0$ を用いずに、 $P_0$ 、 $P_L$ 、 $L$ 、 $r_0$ 、 $R$ 、 $\mu_B$ 等を用いて表せ。
- (4) ビンガム流体の速度分布とニュートン流体の速度分布の概形を比較して図示し、それらの違いについて100文字程度で説明せよ。

## 2.

カーボンニュートラルな社会をめざす中で、エネルギー源としての水素の利用が注目されている。本問では、エネルギー源としての水素の製造や貯蔵のいくつかの方法について、熱力学の視点から考察する。以下の問いに答えよ。なお  は、あてはまる数値または数式を答え、 は、選択肢のうちから適切なものを選べ。

## 2 - 1

水素の実用規模での貯蔵や輸送の形態は、

- 低温の液体水素として貯蔵・輸送
- 常温の高圧ガスとして貯蔵・輸送
- 常温の水素ガスを固体材料中に取り込んで貯蔵・輸送

に大別できる。

まずは、液体水素の製造について考察する。気体を液化するには、ジュール・トムソン (Joule-Thomson) 効果を用いる方法が知られており、水素ガスの液化にもよく利用されている。ジュール・トムソン効果の原理は、図 2 - 1 に示すように、流路中に調圧弁や多孔栓などの絞りを設けることで、そこを通過する流体の温度や圧力が変化するというものである。一般に、絞り部分では、流体の変化は断熱過程とみなすことができ、また流体が工業仕事をすることもなく、ポテンシャルエネルギーや運動エネルギーの変化も無視できるので、絞り部分を通過する流体は等エンタルピー変化すると考えてよい。そこで、流体の等エンタルピー変化における圧力と温度の関係を調べる。

問い合わせ 2 - 1 で使われる主な記号の意味は表 2 - 1 に示すとおりであり、解答に際しても自由に使ってよい。

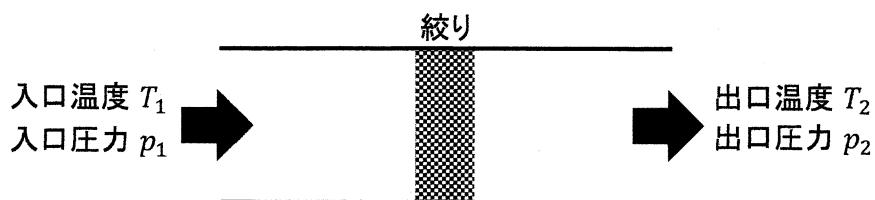


図 2 - 1 絞りを通過する流体の模式図：絞りとして多孔栓を用いた例。

(第 2 問 つぎのページにつづく)

表 2 - 1 記号表

記号	単位	意味
$c_p$	J/(kg · K)	定圧比熱
$c_v$	J/(kg · K)	定積比熱
$f$	J/kg	単位質量あたりのヘルムホルツ自由エネルギー
$g$	J/kg	単位質量あたりのギブス自由エネルギー
$h$	J/kg	単位質量あたりのエンタルピー（比エンタルピー）
$p$	Pa	圧力
$s$	J/(kg · K)	単位質量あたりのエントロピー（比エントロピー）
$T$	K	絶対温度
$u$	J/kg	単位質量あたりの内部エネルギー（比内部エネルギー）
$v$	m <sup>3</sup> /kg	単位質量あたりの体積（比体積）

(1) 単位質量の流体の微小変化について、熱力学第一法則は

$$du = Tds - pdv \quad (2.1)$$

と書きあらわすことができる。比エンタルピーは

$$h = u + pv \quad (2.2)$$

と定義されるから、式 (2.1) より、その微小変化は

$$dh = \boxed{\text{(ア)}} ds + \boxed{\text{(イ)}} dp \quad (2.3)$$

とあらわせる。

(2) 独立変数を  $s$  から  $T$  に変更する。このためには、関係式

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp \quad (2.4)$$

を利用する。式 (2.4) の右辺第1項は、定圧比熱  $c_p$  を用いて

$$\left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT = \boxed{\text{(ウ)}} dT \quad (2.5)$$

とあらわせる。

一方、式 (2.4) の右辺第2項は、マクスウェルの関係式

$$\left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (2.6)$$

(第2問 つぎのページにつづく)

を用いて書き換えることができる。

(3) 単位質量あたりのギブス自由エネルギーの定義

$$g = u - Ts + pv \quad (2.7)$$

およびその全微分に基づいて、式(2.6)を証明せよ。

以上より、式(2.3)は次のように変形できる。

$$dh = c_p dT + \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp \quad (2.8)$$

これより、等エンタルピー過程においては

$$\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_h = \frac{1}{c_p} \left[ -v + T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] \quad (2.9)$$

が成り立つ。この  $\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_h$  はジュール・トムソン係数と呼ばれ、以下では  $\mu_{JT}$  という記号であらわす。

(4) 理想気体では、 $\mu_{JT}$  は常にゼロであることを示せ。

(5) 一般に、気体が絞りを通過する場合には、圧力は低下する（すなわち、図 2-1において  $p_2 < p_1$ ）。 $\mu_{JT} > 0$  の場合、この気体が絞りを通過すると、その温度は  
上昇する、変わらない、低下する。

(6) 水素ガスについて、 $\mu_{JT}$  が正、負となる領域を圧力-温度平面上に示したのが図 2-2 である。常温常圧の水素ガスをジュール・トムソン効果を利用して冷却する方法について、図 2-2に基づいて簡単に議論せよ。

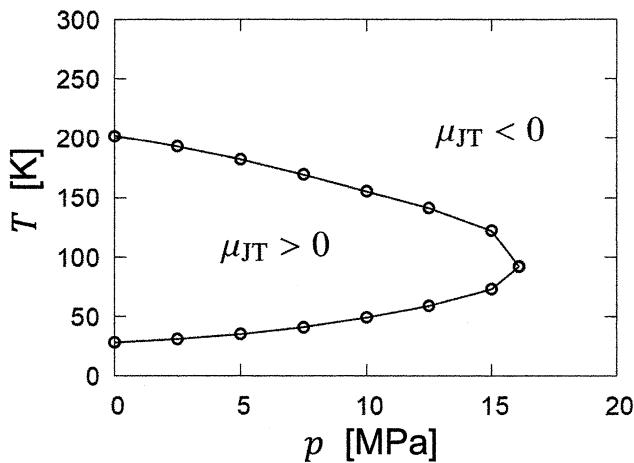


図 2-2 水素ガスのジュール・トムソン係数  $\mu_{JT}$  の圧力・温度依存性。実線は  $\mu_{JT} = 0$  となるデータ点を結んだものである。

\* K. Nasrifar, *Int. J. Hydrogen Energy* (2010) Vol. 35, pp. 3802–3811 のデータに基づいて作成した。

## 2 - 2

次に、常温付近での水素の貯蔵について考察する。水素の気液臨界温度は約 33 K なので、常温では、水素は気体状態で貯蔵することになる。単位体積当たりの貯蔵量を増やすために、通常は、20~70 MPa 程度の高圧条件が使われる。

一方、水素ガスが金属材料と接触すると、その表面に吸着した水素分子が解離して水素原子となって金属中に浸透・拡散し、安定化する場合がある。水素吸蔵合金はこの現象を応用したもので、こうした安定化により、加圧下で多量の水素を常温で金属中に貯蔵でき、減圧すると水素ガスを取り出せる。ここでは、簡単なモデルに基づいて、金属結晶の水素吸蔵挙動を熱力学的に考察する。

一般に、このような金属結晶には、水素原子を吸蔵できるサイト（格子欠陥、空孔など）が多数存在する。ここでは、吸蔵サイトは 1 種類とし、各サイトには高々 1 つの水素原子が吸蔵されるとする。1 つのサイトに水素原子が吸蔵されるとエネルギーが  $\epsilon$  [J] ( $\epsilon$  は正の定数) だけ低下するというモデルを考える。単位質量の結晶には、このような吸蔵サイトが  $M$  個あるとする。さらに、各サイトの水素吸蔵は、他のサイトが水素原子で占められているか否かによらず、独立におこなわれるとする。

以上のモデル化により、単位質量の結晶が、温度  $T$  [K] の熱平衡状態で  $N$  個の水素原子を吸蔵している確率  $P(N)$  は、水素原子の化学ポテンシャル  $\mu_H$  [J] の関数として、次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} P(N) &\propto \frac{M!}{N!(M-N)!} \exp\left[-\frac{-N\epsilon - N\mu_H}{k_B T}\right] \\ &= \frac{M!}{N!(M-N)!} \exp\left[\frac{N(\epsilon + \mu_H)}{k_B T}\right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここで、 $k_B$  はボルツマン定数 ( $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23}$  J/K), 指数関数はボルツマン因子である。また、係数  $\frac{M!}{N!(M-N)!}$  は、 $M$  個の吸蔵サイトのうち  $N$  個が水素原子で占められている「場合の数」である。式の表現を簡単にするために、記号  $\alpha = \exp\left[\frac{\epsilon + \mu_H}{k_B T}\right]$  を定義すると、規格化された確率は

$$P(N) = \frac{\frac{M!}{N!(M-N)!} \alpha^N}{\sum_{N'=0}^M \frac{M!}{N'!(M-N')!} \alpha^{N'}} \quad (2.11)$$

とあらわされる。

(1) 式 (2.11) の分母 (規格化因子) を  $\Xi$  (ギリシャ文字“クサイ”の大文字) とする。

$$\Xi = \sum_{N'=0}^M \frac{M!}{N'!(M-N')!} \alpha^{N'} \quad (2.12)$$

この級数を計算し、 $\Xi$  を  $M$  と  $\alpha$  であらわせ。

(2) 吸蔵された水素原子の数の平均値  $\langle N \rangle$  は、規格化された確率  $P(N)$  を用いて次式で求められる。

$$\langle N \rangle = \sum_{N=0}^M N P(N) \quad (2.13)$$

このとき、次の式 (2.14) が成り立つことを、式 (2.11) に基づいて証明せよ。

$$\langle N \rangle = k_B T \left( \frac{\partial \log \Xi}{\partial \mu_H} \right)_T \quad (2.14)$$

問い合わせ 2-2 (1) で得られた  $\Xi$  を式 (2.14) に代入して計算すると、

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\alpha^{-1} + 1} M = \frac{1}{\exp\left[-\frac{\epsilon + \mu_H}{k_B T}\right] + 1} M \quad (2.15)$$

となる。

(3) 水素原子は金属表面に吸着した水素分子が解離することで生じる。



(第2問 つぎのページにつづく)

この反応式より、熱平衡状態では、水素分子の化学ポテンシャル  $\mu_{H_2}$  と水素原子の化学ポテンシャル  $\mu_H$  の間には

$$\mu_{H_2} = 2\mu_H \quad (2.17)$$

の関係があることがわかる。一方、水素ガスを理想気体とみなすことができる場合、温度  $T$ において、化学ポテンシャル  $\mu_{H_2}$  は水素ガスの圧力  $p$  と次のような関係がある。

$$\frac{p}{p^0} = \exp \left[ \frac{\mu_{H_2} - \mu_{H_2}^0}{k_B T} \right] \quad (2.18)$$

ここで、 $p^0$  はある基準圧力（たとえば 0.1 MPa）、 $\mu_{H_2}^0$  はこの圧力  $p^0$  における水素ガスの化学ポテンシャルである。式 (2.17) および式 (2.18) を式 (2.15) に代入すると、吸蔵割合  $\frac{\langle N \rangle}{M}$  は、 $p, p^0, \epsilon, \mu_{H_2}^0, k_B, T$  を用いて次式のように書きあらわすことができる。

$$\frac{\langle N \rangle}{M} = \boxed{\frac{1}{(\epsilon)}} \quad (2.19)$$

(4) 式 (2.19) のグラフとして最も適切なものを、図 2-3 の (a)-(d) から 1 つ選べ。

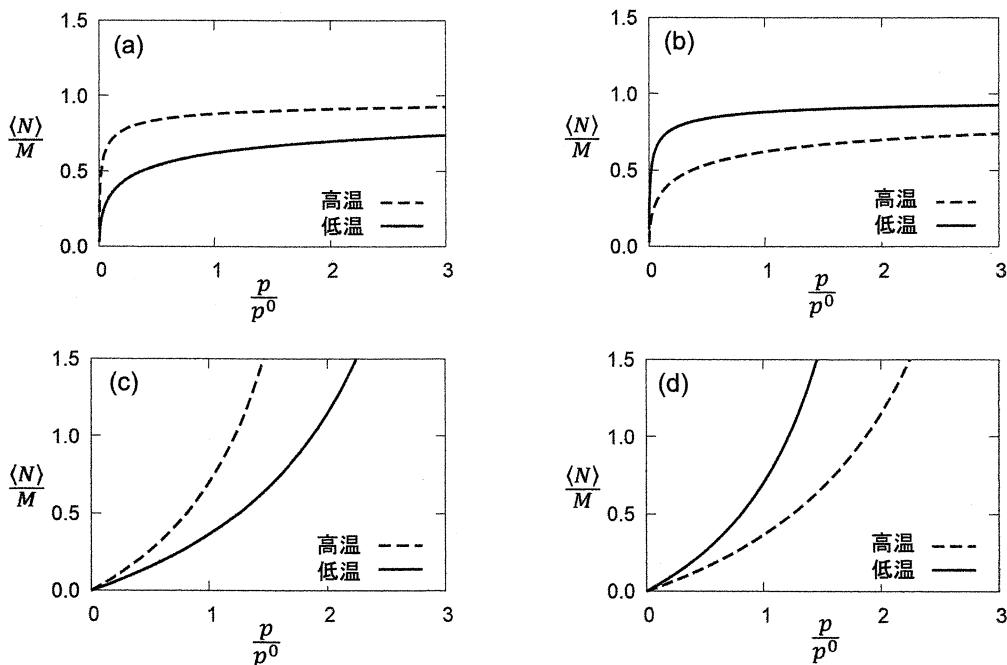
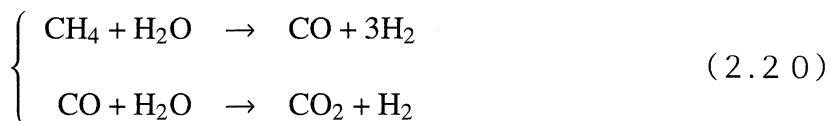


図 2-3 吸蔵割合の水素ガス圧力依存性：問い合わせ 2-2(4) の選択肢。

## 2 - 3

水素の製造方法にもいろいろな種類があり、水の電気分解や天然ガスの改質などはよく知られている。ここでは、天然ガスの主成分であるメタン  $\text{CH}_4$  を原料とする水素製造について考察する。次の化学反応式（2.20）であらわされる、水蒸気改質と水性ガスシフト反応（以下では「シフト反応」と表記する）を利用する方法はすでに実用化されている。



この方法は、反応生成物として二酸化炭素  $\text{CO}_2$  を排出するという欠点がある。

$\text{CO}_2$  を生成しない化学反応を利用する方法として、最近、メタンガスを熱分解する技術の開発が進んでいる。メタンの熱分解反応の化学反応式は式（2.21）であらわされる。



ここで、C(s) は固体(solid) 状の炭素（グラファイトあるいは無定形炭素など）をあらわす。生成された C(s) は、 $\text{CO}_2$  のように大気中に放出されることがないので、メタンの熱分解による水素生成はカーボンニュートラルな方法と位置づけられている。

反応に伴うエネルギーの出入りについて、式（2.20）と式（2.21）を比較する。一般に、こうした化学反応は一定温度・一定圧力の条件下で行うことが多く、その場合には、反応物（反応前）と生成物（反応後）のエンタルピー差の分だけ、発熱あるいは吸熱することになる。さまざまな物質について、標準状態（温度 298.15 K, 圧力 0.1 MPa）でその物質 1 mol を合成する際の反応熱（標準生成エンタルピー） $\Delta_f H^\circ$  が測定されている。ただし、標準状態で安定に存在する単体（单一の元素からなる純物質）の生成エンタルピーはゼロ（基準）と定義されている。問い合わせ 2 - 3 に関する物質の $\Delta_f H^\circ$  を、表 2 - 2 に示す。

表 2 - 2 標準生成エンタルピー  $\Delta_f H^\circ$  の例。 (s) は固体、 (l) は液体、 (g) は気体をあらわす。 $\Delta_f H^\circ < 0$  は、その物質を生成する際にエンタルピーが減少すること、すなわち発熱反応であることを意味する。

[データの出典] 国立天文台編、理科年表プレミアム 2023 (丸善)。

物質	$\Delta_f H^\circ$ [kJ/mol]
C(s)	0
$\text{H}_2$ (g)	0
$\text{O}_2$ (g)	0
CO(g)	-110.5
$\text{CO}_2$ (g)	-393.5
$\text{CH}_4$ (g)	-74.6
$\text{H}_2\text{O}$ (l)	-285.8

(1) 表2-2より、ただちに、式(2.21)の熱分解反応における反応熱は、標準状態においては (オ) kJ/mol であるとわかる。これは 発熱反応、吸熱反応 である。

(2) 続いて、式(2.20)の水蒸気改質・シフト反応の反応熱を求める。この2つの反応は、水蒸気を用いて行われるので、液体の水を水蒸気にする必要がある。標準状態での水の蒸発潜熱（標準蒸発エンタルピー） $\Delta_vH^\circ$  は、44.0 kJ/mol である。従って、標準状態では、 $\text{CH}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{CO} + 3\text{H}_2$  の反応熱は (カ) kJ/mol であり、 $\text{CO} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2$  の反応熱は (キ) kJ/mol と求まる。  
式(2.20)を1つの反応式にまとめると



と書けるが、以上の結果から、式(2.22)の反応熱は、標準状態では (ク) kJ/mol となる。

- (3) 問い2-3(1)と(2)の結果を比較すると、式(2.22)の反応に比べて、式(2.21)の熱分解反応を利用するほうが (ケ) kJ/mol だけ反応熱が小さく、同量のメタンを反応させるのに必要なエネルギー量は少ないとすることになる。
- (4) 一方、生成する水素の量に関して、熱分解反応が水蒸気改質・シフト反応に比べて不利な点について、式(2.21)と式(2.22)を比較しながら簡単に議論せよ。

なお、実際には、どちらの反応も 1000 K 程度の高温条件下で利用されることが多いため、ここで求めた反応熱に加えて、各物質を昇温するためのエネルギーが必要となるが、そのエネルギーの一部は、反応後に生成物を常温に戻す際に回収することができ、定性的な結論は変わらない。

## 3.

縦弾性係数  $E$ , 横弾性係数  $G$  の均質な線形・等方弾性体からなる部材について以下の問い合わせよ。ただし、部材の変形は微小とし、自重の影響は無視せよ。

## 3-1

図 3-1(a)に示すように、長さ  $L$ , 直径  $d$  の中実円形断面棒の中心軸に  $x$  軸を一致させ、左端の断面の中心を原点  $O$  として  $x$ - $y$ - $z$  座標系をとる。また、中心軸からの距離を  $r$  とする。棒の直径  $d$  は長さ  $L$  に比べて十分に小さく、棒の軸方向に一定とする。

- (1) この棒の任意の横断面（棒の中心軸に垂直な断面）について、図 3-1(b)に示すように中心  $O'$  を通り  $y$  軸,  $z$  軸に平行な軸をそれぞれ  $y'$  軸,  $z'$  軸とする。この断面の中心  $O'$  に関する断面二次極モーメント  $I_p$  および  $z'$  軸に関する断面二次モーメント  $I_z$  が次式で与えられることを示せ。

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \quad I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

- (2) 図 3-1(c)に示すように、この棒に大きさ  $T_0$  のねじりモーメントを加えたときのつり合い状態を考える。単位長さあたりのねじれ角（比ねじれ角）を  $\omega$  とすると、ねじりによるせん断ひずみは  $\gamma = \omega r$  と表される。このとき棒の横断面に生じているせん断応力がこの断面の中心に関して作るモーメントとねじりモーメント  $T_0$  の関係を示し、比ねじれ角  $\omega$  を  $T_0$ ,  $I_p$ ,  $G$  を用いて表せ。
- (3) 図 3-1(d)に示すように、この棒に大きさ  $M_0$  の曲げモーメント（棒を  $y$  軸の正方向に凸に曲げる向きに作用するモーメント）を加えたときのつり合い状態を考える。中立面 ( $y = 0$ ) の曲率半径を  $R$  とすると、曲げによる軸方向の垂直ひずみは  $\varepsilon = y/R$  と表される。このとき棒の横断面に生じている垂直応力が中立軸に関して作るモーメントと曲げモーメント  $M_0$  の関係を示し、曲率半径  $R$  を  $M_0$ ,  $I_z$ ,  $E$  を用いて表せ。

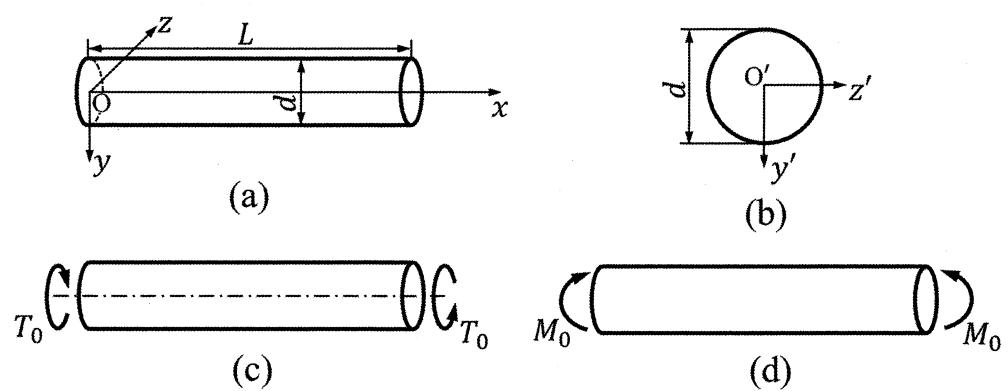


図 3-1

(第3問 つぎのページにつづく)

## 3-2

図3-2に示すように、長さ  $L$  の直線棒 AB が両端を固定されている。棒の横断面は直径  $d$  の中実円形断面であり、直径  $d$  は長さ  $L$  に比べて十分に小さく、棒の軸方向に一定とする。また、棒の軸方向に  $x$  軸をとり、左端 A で  $x = 0$ 、右端 B で  $x = L$  とする。なお、両端を固定された状態で棒は水平に保たれており、応力は生じていないと仮定する。

- (1) 図3-2(a)に示すように、この棒が中央 Cにおいて大きさ  $T_C$  のねじりモーメントを受けてつり合い状態にあるとき、中央 Cでのねじれ角  $\phi_C$  を求めよ。ただし棒の横断面の中心に関する断面二次極モーメントを  $I_p$  として解答に用いてよい。
- (2) 図3-2(b)に示すように、この棒が中央 Cにおいて鉛直下向きに大きさ  $P_C$  の集中荷重を受けてつり合い状態にあるとき、中央 Cでのたわみ  $\delta_C$  を求めよ。ただし棒の横断面の中立軸に関する断面二次モーメントを  $I_z$  として解答に用いてよい。
- (3) この棒が問い合わせ3-2(1)のねじりモーメント  $T_C$  と問い合わせ3-2(2)の集中荷重  $P_C$  を同時に受けてつり合い状態にあるとする。このとき棒に生じる応力を、ねじりモーメント  $T_C$  により生じるせん断応力と集中荷重  $P_C$  による曲げで生じる垂直応力の組合せ応力として考える。棒に生じる垂直応力が最大となる位置の  $x$  座標（複数あればすべて）を求めよ。また、棒に生じる垂直応力の最大値  $\sigma_{\max}$  を  $T_C$ ,  $P_C$ ,  $L$ ,  $d$  を用いて表せ。

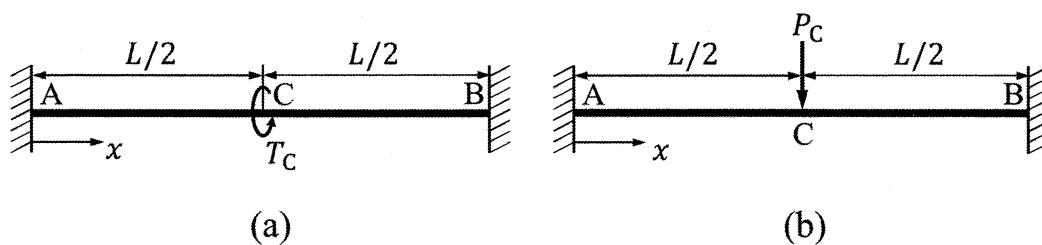


図3-2

## 3 - 3

図3-3に示すように、半径  $R$  の半円形リング AB が一端 B で水平に固定されている。リングの横断面（リングの軸線に垂直な断面）は直径  $d$  の中実円形断面であり、直径  $d$  はリングの半径  $R$  に比べて十分に小さく、リングに沿って一定とする。また、図3-3に示すようにリングの横断面の位置を表す角度を  $\theta$  とし、先端 A で  $\theta = 0$ 、固定端 B で  $\theta = \pi$  とする。

- (1) 図3-3(a)に示すように、このリングが先端 A において大きさ  $T_A$  のねじりモーメントを受けてつり合い状態にあるとする。ただし、このねじりモーメントの向きは図3-3(a)に示す矢印の向きのとおりである。このときリングの横断面で生じる曲げモーメント  $M_1$  およびねじりモーメント  $T_1$  を、横断面の位置を表す角度  $\theta$  の関数として求めよ。ただしこれらのモーメントが正となる向きは任意に定めてよい。
- (2) 図3-3(b)に示すように、このリングが先端 A において鉛直下向きに大きさ  $P_A$  の集中荷重を受けてつり合い状態にあるとする。このときリングの横断面で生じる曲げモーメント  $M_2$  およびねじりモーメント  $T_2$  を、横断面の位置を表す角度  $\theta$  の関数として求めよ。ただしこれらのモーメントが正となる向きは問い3-3(1)の解答で定めた正の向きに合わせよ。
- (3) このリングが問い3-3(1)のねじりモーメント  $T_A$  を受けてつり合い状態にあるとき、リングの先端 A の鉛直下向きの変位  $\delta_A$  を求めよ。

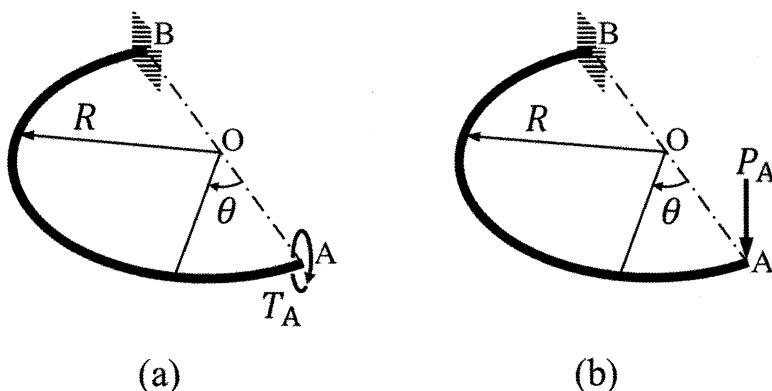


図3-3

4.

ここでは、 $t$  を時間、 $s$  をラプラス変換の変数とする。また、本問で扱う制御対象の初期値は全て 0 とする。以下の問い合わせに答えよ。

4 - 1

(1) 2つの系（系1と系2）を考える。系1は、入力から出力までの伝達関数が  $G_1(s)$  で表され、系2は  $G_2(s)$  で表されるとする。系1には単位インパルス関数を、系2には単位ステップ関数を入力し、それぞれの応答を求めたところ、どちらも出力が

$$y(t) = \frac{7}{20} + \frac{2}{5}e^{-5t} - \frac{3}{4}e^{-4t}$$

となった。このとき、 $G_1(s)$  および  $G_2(s)$  を求めよ。

以下では、図4-1のブロック線図で表される制御系を考える。次の問い合わせに答えよ。

(2) 制御器の伝達関数を  $C(s) = k$  とし、制御対象の伝達関数を  $G(s) = G_1(s)$  とする。ただし、 $k$  は正の実定数、 $G_1(s)$  は問い合わせ4-1(1)で求めた伝達関数である。目標値  $R(s)$  から出力  $Y(s)$  までの閉ループ伝達関数  $G_{cl}(s)$  を求めよ。また、 $G_{cl}(s)$  の全ての極の実部を、-6 より大きく、かつ -1 より小さい範囲に配置したい。これを実現する  $k$  の範囲を求めよ。

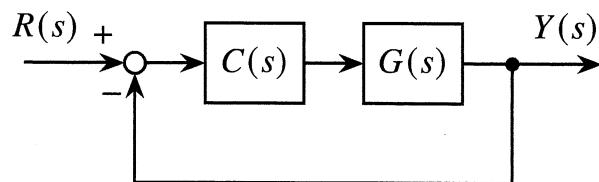


図4-1

## 4 - 2

図4-2のブロック線図で表される制御系を考える。ここに、 $R(s)$ は目標値、 $Y(s)$ は出力、 $C_1(s)$ および $C_2(s)$ は制御器の伝達関数、 $U(s)$ は制御入力である。また、制御対象の伝達関数を

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

とする。ここで、2つの制御系(制御系1と制御系2)を考える。制御系1は、 $C_1(s) = k_p + sk_d$ 、 $C_2(s) = 0$ と設定した制御系であり、制御系2は、 $C_1(s) = k_p$ 、 $C_2(s) = sk_d$ と設定した制御系である。制御系1では、目標値がステップ状に変化した際、制御入力にインパルス状の成分が含まれるという問題が生じる。他方、制御系2は、この問題を解決した制御系として知られている。 $k_p = 2$ 、 $k_d = 1$ とし、以下の2つの問い合わせを通して、この問題について考える。以下の問い合わせに答えよ。

- (1) 制御系1において、 $R(s)$ から $U(s)$ までの伝達関数を導出せよ。次に、制御系1に対して、目標値として単位ステップ関数を入力した場合の、制御入力 $U(s)$ の時間応答 $u_1(t)$ を求め、そこにインパルス状の成分が含まれることを示せ。
- (2) 制御系2では、制御系1で発生する問題が生じない。この問題が生じない理由を説明せよ(問い合わせ4-2(1)のように、数式を用いて制御入力にインパルス状の成分が含まれないことを示しても良いし、言葉のみで説明しても良い)。

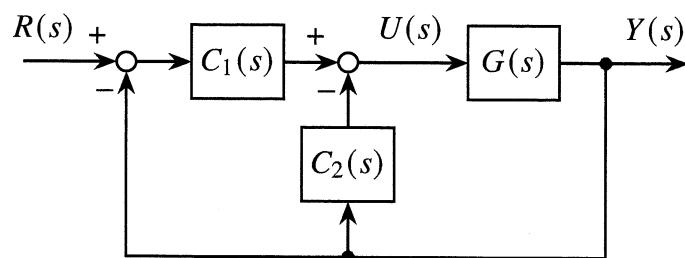


図4-2

## 4 - 3

図4-2のブロック線図で表される制御系を考える。ここに、 $R(s)$ は目標値、

$$G(s) = \frac{1}{s(s-2)}$$

は制御対象の伝達関数、 $C_1(s) = k_p$  および  $C_2(s) = sk_d$  は制御器の伝達関数、 $U(s)$  は制御入力、 $Y(s)$  は出力である。また、 $k_p$  および  $k_d$  は正の実定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $R(s)$  から  $Y(s)$  までの閉ループ伝達関数  $G_{cl}(s)$  を求めよ。さらに、 $G_{cl}(s)$  が安定となる  $k_p$  および  $k_d$  の範囲を求めよ。
- (2)  $G_{cl}(s)$  が安定となり、かつ目標値として単位ステップ関数を入力した際の出力が単調増加にならない（出力が振動的になる） $k_p$  および  $k_d$  の範囲を求め、その範囲を  $k_d - k_p$  平面（横軸が  $k_d$ 、縦軸が  $k_p$  の図）上に図示せよ。

問い合わせ4-3(1) や問い合わせ4-3(2) を通し、制御系を安定化しつつ、出力が過減衰や臨界減衰にならない  $k_p$  および  $k_d$  の範囲を求めた。実際の制御器設計では他にも様々な設計要件があり、それらを満たすように  $k_p$  や  $k_d$  の値を確定していくことになる。次の問い合わせに答えよ。

- (3) 設計要件の1つとして、バンド幅がある。バンド幅とは、閉ループ伝達関数  $G_{cl}(s)$  のゲイン  $|G_{cl}(j\omega)|$  が、 $|G_{cl}(0)|$  の  $1/\sqrt{2}$  倍となる角周波数  $\omega > 0$  のことである。なお、 $j$  は虚数単位である。このバンド幅を、問い合わせ4-3(1) で求めた  $G_{cl}(s)$  の速応性（目標値に対する出力応答の速さ）の評価指標として用いることができる理由を述べよ。