2023年8月6日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2024年度大学院修士課程入学試験問題

機械力学

（150点）

13:00～14:30

問題数 2問

注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと．

2．　問題２問すべてに解答せよ．

3．　万一落丁を見つけた場合には，手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること．

1．

宇宙機が天体の万有引力の影響を受けて運動する場合を考える．宇宙機は，適切な量の推進剤を進行方向に平行に噴射することにより力積を受けて加減速し，目標とする運動を実現する．推進剤を除いた宇宙機単体の質量は m であり，加えて十分な量の推進剤が搭載されているものとする．宇宙機と噴射される前の推進剤は相互作用することなく一緒に運動する．簡単のため，推進剤はごく短時間の間に噴射され，宇宙機の速さが瞬間的に変化するように扱うことができるものとする．さらに，宇宙機の自転に関する角運動量と回転運動のエネルギー，ならびに宇宙機と噴射された推進剤の間の万有引力は無視する．

天体は一様な球体で，その質量は M であり，宇宙機と天体の間には万有引力定数を G として $G\frac{mM}{r^2}$ の引力が作用している．ここで r は宇宙機と天体の中心の距離である．$M \gg m$ であるため天体の中心が原点に静止していると見なすことができる．また，宇宙機は天体から十分離れた位置で運動し，天体に衝突したり，天体の大気の影響を受けたりしないものとする．

以下の問いでは宇宙機単体の運動について解答せよ．

1－1

宇宙機が推進剤を噴射せずに天体の周りを運動する場合を考える．宇宙機は $x-y$ 面内を運動し，その座標を原点からの距離 r と，x 軸からの角度 θ で表すことにする．

（1）　宇宙機の天体の周りの運動に関するラグランジアンを求め，r と θ に関するラグランジュの運動方程式を示せ．

（2）　ラグランジュの運動方程式に基づいて，宇宙機の天体周りの角運動量が保存されることを示せ．

（3）　ラグランジュの運動方程式に基づいて，宇宙機の力学的エネルギーが保存されることを示せ．

1－2

宇宙機が，天体の周りで半径 a，速さ v_0 の等速円運動をしている状態から，軌道の接線方向に適切な量の推進剤を噴射して周回軌道を脱出し，無限遠に向かう場合を考える．

図1－1に示す方法では，宇宙機が等速円運動の軌道1の接線方向に推進剤を1回だけ噴射して周回軌道を脱出し，無限遠に向かう．宇宙機は推進剤の噴射による力積を受け，それに対応する運動量の増加量のうち，宇宙機単体が担う分を $m\Delta v_1$ とする．また，無限遠での宇宙機の速さを v_∞ とする．

（第1問　つぎのページにつづく）

図１－２に示す方法では，宇宙機が等速円運動の軌道１の接線方向に推進剤の一部を逆噴射して減速し，楕円運動の軌道２に移った後に，宇宙機と天体が最も接近する位置で残りの推進剤を軌道の接線方向に噴射して加速し，周回軌道を脱出して無限遠に向かう．

宇宙機は逆噴射によって進行方向に対して逆向きの力積を受け，それに対応する運動量の減少量のうち，宇宙機単体が担う分を $m|\Delta v_d|$ とする．すなわち逆噴射直後の宇宙機の速さを v_d とすると，$v_d = v_0 - |\Delta v_d|$ である．逆噴射後の宇宙機は，天体に衝突したり大気の影響を受けるほど天体に接近したりせず，楕円運動の軌道２に沿って運動するものとする．楕円運動の軌道２では，宇宙機と天体が最も接近した時の，宇宙機と天体の中心の距離を b とし，その時の宇宙機の速さを v_b とする．宇宙機は，天体と最接近する位置における２回目の噴射によって進行方向に力積を受け，それに対応する運動量の増加量のうち，宇宙機単体が担う分を $m\Delta v_e$ とする．また，無限遠での宇宙機の速さを v'_∞ とする．

なお，本問いに対する答案には最終的に M と G を用いない形式を示すこと．

（１）　図１－１に示す方法で宇宙機が無限遠に向かう時，$\Delta v_1/v_0$ を v_∞/v_0 で表せ．

（２）　図１－２に示す方法で宇宙機が無限遠に向かう途中の v_d と v_b を，v_0，a，b で表せ．逆噴射直後と，宇宙機が天体に最接近した時には $\dot{r} = 0$ となることに注意せよ．

（３）　図１－２に示す方法で宇宙機が無限遠に向かう時，$\Delta v_2 = |\Delta v_d| + \Delta v_e$ として，$\Delta v_2/v_0$ を v'_∞/v_0，a，b で表せ．

（４）　図１－１のように１回の噴射で無限遠に向かう場合と，図１－２のように２回の噴射で無限遠に向かう場合の宇宙機単体が受ける力積の大きさの総和を等しくする時，すなわち $m\Delta v_1 = m\Delta v_2 = m\Delta v$ とする時，$v_\infty < v'_\infty$ となるために Δv に求められる条件を示せ．

（５）　図１－２のように２回の噴射で無限遠に向かう場合，仮に宇宙機と天体が最も接近する位置以外で２回目の噴射を行うと，運動量の増加量 $m\Delta v_e$ に変わりがなくても，無限遠での宇宙機の速さが遅くなったり，条件によっては天体の周回軌道を脱出することができなくなる．その理由を以下の点に着目して説明せよ．

- 楕円軌道上での宇宙機の力学的エネルギー．
- 楕円軌道上での宇宙機の速さ．
- 宇宙機の速さが Δv_e だけ増加する時の宇宙機単体の運動エネルギーの変化量．

（第１問　つぎのページにつづく）

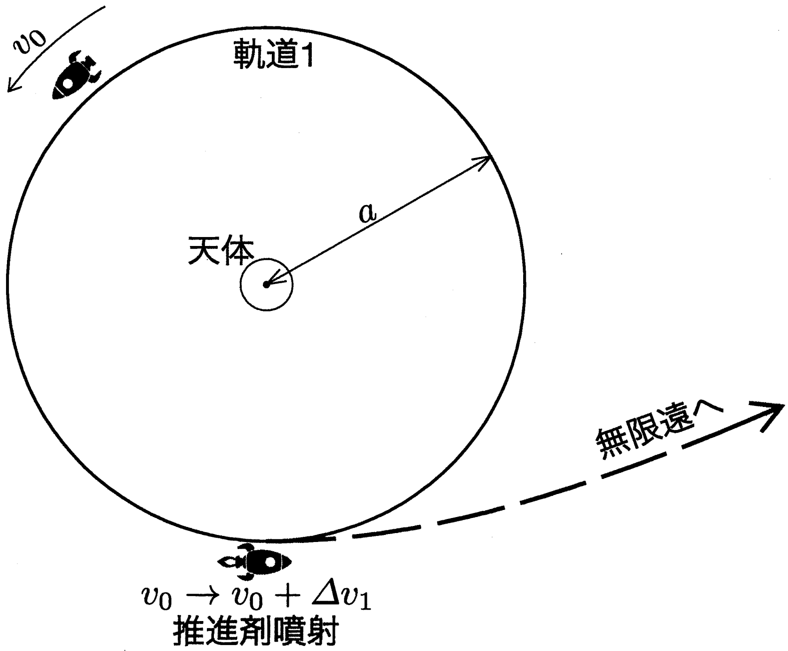

図１－１

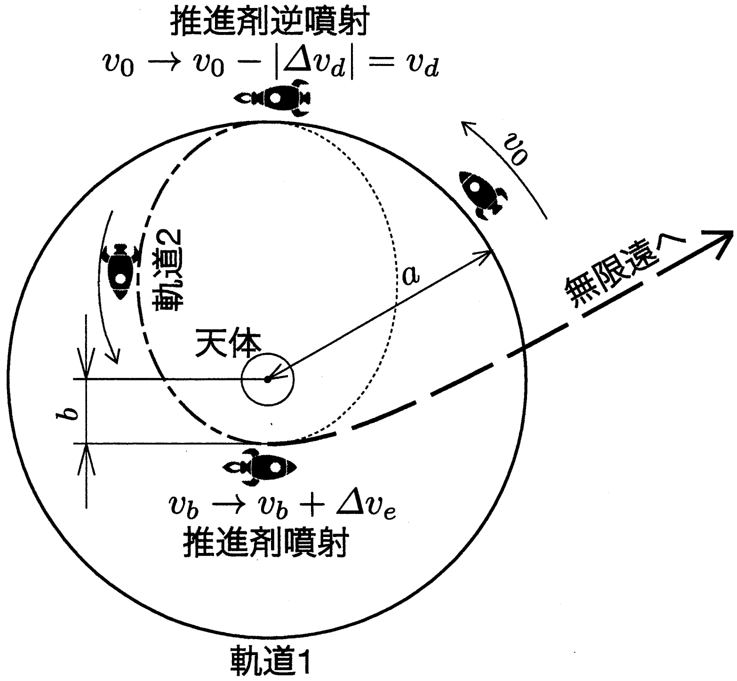

図１－２

（第１問　おわり）

2．

図２－１および図２－２の振り子について，以下の問いに答えよ．すべての運動において，可動部の摩擦や空気の抵抗は無視できるものとする．重力加速度をgとすること．解答において，時間微分を示す記号としてドット（・）を変数の上に用いてよい．

２－１

図２－１のような変形しない中空円筒の中で，質量mのおもりがばね定数kのばねに吊るされている系を考える．筒の上端は天井に取り付けられており，筒は紙面内で振り子運動をする．筒の上端とばねの上端は一致しており，その点Oを原点とする．筒は太さが無視できるほど十分細く，おもりは筒の中で筒の内壁に沿って運動をする．そのとき，筒の鉛直下方からの変位角をθ，ばねの長さをl（自然長をl_0）とする．筒とばねの質量は無視できる（すなわち，筒とばねの慣性モーメントは無視してよい）ものとし，おもりは質点とみなす．

（１）おもりの運動エネルギーTおよびポテンシャルエネルギーUを求めよ．ただし，原点Oの高さをポテンシャルエネルギーの基準面とすること．

（２）変数θおよびlに関するおもりの運動方程式をそれぞれ求めよ．

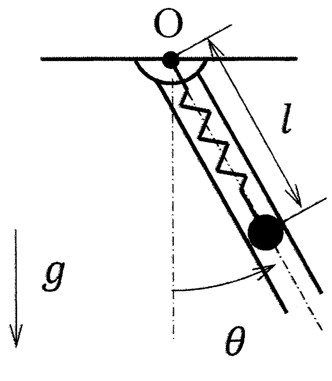

図２－１

（第２問　つぎのページにつづく）

２－２

次に，図２－２のような剛体の棒の上端が天井に吊るされている系を考える．棒の質量をM，長さをLとし，棒の密度は一様で太さは無視できるほど十分細いものとする．図のように，棒は点Ｏを支点として天井から吊り下げられており，点Ｏまわりに摩擦なく自由に動くことができる．そのときの鉛直下方からの棒の変位角をθとし，鉛直軸まわりの棒の回転角をφとする．なお，変数の上のドット（・）は時間微分を表す．

（１）$\dot{\varphi}=0$のときの変数θに関する棒の運動方程式を求めよ．

（２）$\dot{\varphi}\neq 0$のときの変数θとφに関する棒の運動方程式をそれぞれ求めよ．ただし，$\theta\neq 0$とする．

（３）棒にφ方向の回転力を与えて手を離したところ，$\dot{\varphi}=\omega_0$（>0）の一定速度で回転し，そのとき棒の変位角θが$0<\theta<\pi/2$の範囲で一定となった．そのときの$\theta\equiv\theta_0$をω_0を含む式で表せ．

（４）問い２－２（３）の状態から，棒に対してθ方向に小さな撃力を加えて棒の運動を変化させた．このとき，棒の鉛直軸まわりの角運動量は保存されるとする．その後の棒の運動に関して，θ方向のθ_0からの微小なずれをε，すなわち，

$$\theta=\theta_0+\varepsilon\quad(|\varepsilon|\ll\theta_0)$$

とする．このときのεに関する運動方程式を求めよ．ただし，εの２次以上の項は無視してよい．また，そのεに関する運動は単振動で表されることを示せ．

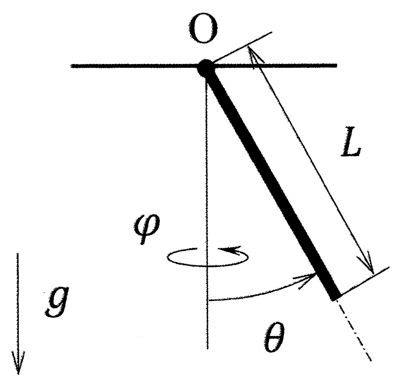

図２－２

（第２問　おわり）