2023年8月6日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2024年度大学院修士課程入学試験問題

数学

（180点）

9:30～11:30

問題数 2問

注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと．
2．　問題２問すべてに解答せよ．
3．　万一落丁を見つけた場合には，手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること．

１．x を独立変数とする無限回微分可能な関数 $f = f(x)$ を考える．微分演算子 D を

$$D = \frac{d}{dx} \qquad (1.\ 1)$$

と定義すると，f の k 階導関数（$k = 1, 2, 3, \cdots$）は

$$Df = \frac{df}{dx}, \qquad D^2 f = D(Df) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \qquad D^3 f = D(D^2 f) = \frac{d^3 f}{dx^3}, \qquad \cdots \qquad (1.\ 2)$$

と表せる．さらに，微分演算子 D の定数係数の多項式で表される演算子

$$P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n \qquad (1.\ 3)$$

を考えると，$P(D)$ の f への作用は

$$\begin{aligned} P(D)f &= (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) f \\ &= a_0 D^n f + a_1 D^{n-1} f + a_2 D^{n-2} f + \cdots + a_{n-1} Df + a_n f \end{aligned} \qquad (1.\ 4)$$

である．演算子 $P(D)$ は線形演算子である．また，同様の演算子どうしの和（加法）と積（乗法）に関して結合法則と交換法則が成り立ち，さらに分配法則が成り立つ．これらの性質は解答で証明なしに使ってよい．以下の問いに答えよ．

１－１

（１）　次の関数 g と演算子 $P(D)$ について，$P(D)g$ を計算せよ．

$$g = xe^{2x}, \qquad P(D) = 2D^2 + D + 3 \qquad (1.\ 5)$$

（２）　すべての自然数 k に対して次式が成り立つことを証明せよ．ここで a は定数である．

$$D^k(e^{ax} f) = e^{ax}(D + a)^k f \qquad (1.\ 6)$$

（３）　式（１．６）を使って，微分方程式

$$(D - \lambda)^k f = 0 \qquad (1.\ 7)$$

の一般解を与える公式を導出せよ．ここで k は自然数，λ は定数である．

１－２

関数 $y = y(x)$，$z = z(x)$ に関する次の連立微分方程式を考える．

$$\begin{cases} D(D-1)y - z = x^2 \\ Dy + (D-3)z = 3x^2 \end{cases} \qquad (1.\ 8)$$

（１）　式（１．８）から z を消去し，y に関する微分方程式を

$$Q(D)y = r(x) \qquad (1.\ 9)$$

の形に表せ．ただし，$Q(D)$ は微分演算子 D の定数係数の多項式で表される演算子，$r(x)$ は x のみの関数である．

（2）　問い１－２（１）で導いた y に関する微分方程式の同伴方程式の一般解を求めよ．ただし，式（１．９）の微分方程式に対して，$r(x)$ を 0 に置き換えた

$$Q(D)y = 0 \qquad (1.\ 10)$$

を，式（１．９）の同伴方程式という．

（3）　問い１－２（１）で導いた y に関する微分方程式の特殊解 y_0 を１つ求めよ．

（4）　「$x=0$ のとき，$y=0$, $Dy=0$, $z=0$」の初期条件を満たす，式（１．８）の解 y, z を求めよ．

（第１問　おわり）

2．

デカルト座標系 xyz において，実ベクトルの場 $\boldsymbol{v}$ および閉曲線 C の方程式を，次のように定義する．

$$\boldsymbol{v} = (-y,\ x,\ 0) \tag{2.1}$$

$$C:\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad z = 0 \tag{2.2}$$

ここで，C の方向は図 2－1に示す方向とし，図中の O は原点を表す．以下の問いに答えよ．

2－1

（1） 次の（a），（b）をそれぞれ計算せよ．ただし，z 軸上の点を除くものとする．

$$\text{(a)}\quad \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), \qquad \text{(b)}\quad \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

（2） C' を，C と同じ方向を持つ，C の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の範囲の曲線としたとき，線積分

$$\int_{C'} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$$

を計算せよ．ここで，$d\boldsymbol{r}$ は C' に沿った微小変位のベクトルを表す．

2－2

（1） あるベクトル $\boldsymbol{a}$ を，ある単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向に射影したベクトルを，$\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{n}$ を用いて表せ．ここで，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{n}$ はともに実ベクトルとする．

（2） C 上の点 $(\sqrt{3},\ \frac{1}{2},\ 0)$ における，単位接線ベクトルおよび単位法線ベクトルを求めよ．ただし，接線ベクトルの方向は C の方向とする．また，法線ベクトルは接線ベクトルと垂直かつ xy 平面内のベクトルで，方向は C の内向きとする．

（3） C 上における，光線の反射について考える．点 $(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ から発した光線が，y 軸に平行な正の方向に進み，C 上で 1 回反射したのちに x 軸と交わる点の座標を求めよ．なお，反射は xy 平面内で起こり，入射角と反射角は等しいとする．

（第２問　つぎのページにつづく）

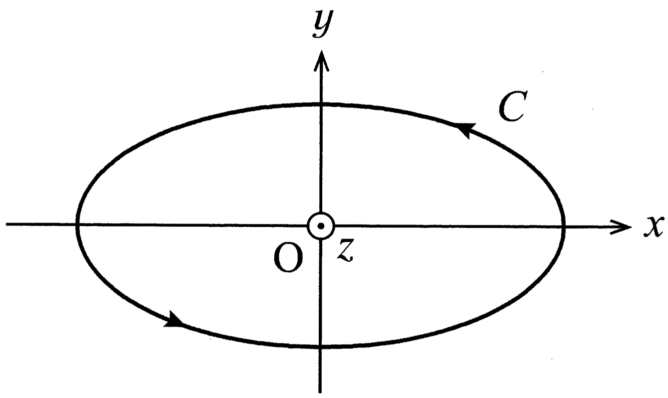

図２－１

（第２問　おわり）