

2022年8月6日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2023年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

(1問100点 × 問題数4問 = 合計400点)

9:00～12:30

問題数 4問

注意事項

1. 問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 問題4問すべてに解答せよ。
3. 万一落丁を見つけた場合には、手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること。

1.

注意：以下の問い1-1および1-2の解答には次の記号を使え。

t ：時間, x_i ($i = 1, 2, 3$)：空間直交座標, ρ ：流体の密度, p ：流体の圧力, u_i ：流体の速度ベクトル \vec{u} の x_i 方向成分, μ ：流体の粘性係数, K_i ：流体の単位質量あたりに働く外力（体積力） \vec{K} の x_i 方向成分.

必要があれば解答に問題末尾の付録 (A), (B) および (C) の内容を断りなしに使って良い。

1-1

密度および粘性係数がそれぞれ一定の粘性流体（ニュートン流体で体積粘性係数がゼロ）に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 3次元の場合の基礎方程式系のうちで質量保存則および運動量保存則（外力 \vec{K} あり）を表す式を簡潔に書け（導出不要）。

$x_2 = 0$ に位置する無限平面壁（通常の固体壁）を境界とする半無限領域 $x_2 > 0$ における流体を考える。流体に働く外力（体積力） \vec{K} はゼロとする。平面壁は x_1 方向に速度 $U \cos \Omega t$ (U および Ω はそれぞれ定数) で振動しており、これによって流体は時間に関して周期的な有限速度の運動をしているとせよ。

- (2) 流体の状態が x_1 および x_3 に依存せず、かつ流速の x_3 方向成分 u_3 がゼロであるという仮定の下で、基礎方程式系および流体が壁面上で満たすべき条件を使って u_1 に関する偏微分方程式を導け。

- (3) 問い1-1 (2) の偏微分方程式の解が複素数として求めれば、その実部および虚部もその偏微分方程式の解であることを説明せよ。

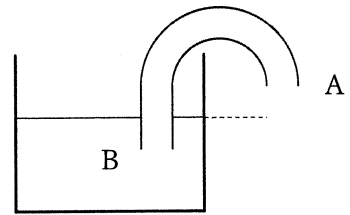
- (4) 問い1-1 (2) の偏微分方程式の解を $Y(x_2) e^{i\Omega t}$ の形で求め、 u_1 を定めよ。

- (5) 平面壁が単位面積あたりに流体から受ける力の x_1 方向成分を求めよ。

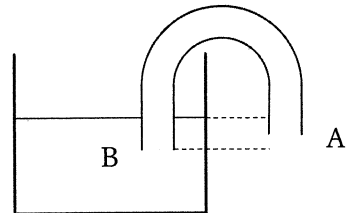
1-2

古代に見出された二つの流体技術に関する以下の問いに答えよ。必要があれば問題説明文に記載されていない量を適宜設定してよい。

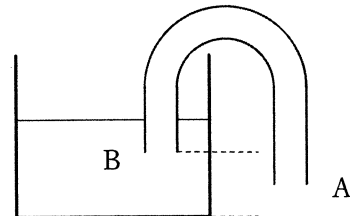
サイフォンの原理を使って壺の中のワインを沈殿物の混入を避けて取り出す様子を描いた古代エジプトの壁画（紀元前 1450 年頃）が遺されている。ここではこれを模擬してポンプを使わずに容器の中の水をホースだけで容器外に取り出すことを考える。使用する容器およびホースの断面はそれぞれ一定で、ホースの断面積は容器の断面積に比べ非常に小さく、ホースの長さは高々数メートルとする。このホース全体を容器中の水に沈め、その内部を全て水で満たしてからその一端（以下 A とする）を閉栓する。そしてもう一端（以下 B とする）を水中に留めたまま、A が図 1-1(a)~(d) のように容器の外側に位置するようにホースを配置し固定する（図では栓が省略されている）。(a)~(d) のいずれの場合もホースは容器の側壁を越えて水面よりも高い所を通る。A（水平に配置）の位置は、(a) では水面より高く、(b) では水面より低く B（水平に配置）よりも高く、(c) では B よりも低く容器底面（水平に配置）よりも高く、そして (d) では容器底面よりも低いとする。水の密度は一定で、表面張力の影響は無視できるとせよ。水面および閉栓部の位置での大気圧は共に p_0 で等しいとせよ。また重力加速度の大きさを g とせよ。



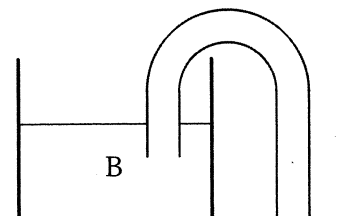
(a)



(b)



(c)



(d)

図 1-1

- (1) 容器中とホース内の水が静止している状態で栓をゆっくり開けると水が容器外に流れ出すのは(a)~(d)のどの場合か。理由と共に答えよ。
- (2) ホース出口 A から排出される水の速さを流体力学の基本的定理を使って見積もれ（流れは定常とせよ）。ただし水の粘性の影響を無視し、ホース出口における水圧は大気圧 p_0 に等しいとせよ。基本的定理の導出は不要であるが、それが使える根拠あるいは導入した仮定は示すこと。

アルキメデス(紀元前 287?-212)は水没した物体に浮力が働くこと(アルキメデスの原理)を見出し、これより純金の王冠に混ぜものがあることを見破ったと言われている。

- (3) 流体力学の基礎方程式系および微分積分学の定理を使って水没した物体に働く浮力を定量的に説明せよ。

付録

- (A) 流体の運動量保存則は次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

ここに P_{ij} は流体の応力テンソルであり、同じ添字が2ヶ所現れる項はその添字に関する総和を意味するとする(アインシュタインの縮約規則)。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_i u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_i u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho u_i u_3), \quad \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial P_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{i3}}{\partial x_3}.$$

- (B) ニュートン流体(体積粘性係数はゼロ)の応力テンソルは

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$$

で与えられる。ここに δ_{ij} はクロネッカーのデルタで

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義される。これより例えば

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}) = \frac{\partial p}{\partial x_1}\delta_{i1} + \frac{\partial p}{\partial x_2}\delta_{i2} + \frac{\partial p}{\partial x_3}\delta_{i3} = \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$P_{11} = -p + \mu \left[\frac{4}{3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right], \quad P_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right).$$

- (C) $\vec{\omega}$ を渦度 ($\vec{\omega} \equiv \nabla \times \vec{u}$) とし、 $\vec{\eta}$ を \vec{u} と $\vec{\omega}$ のベクトル積 ($\vec{\eta} \equiv \vec{u} \times \vec{\omega}$) とすると、

$$\vec{\eta} = \nabla \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

が成り立つ。すなわち $\vec{\eta}$ の x_i 方向成分を η_i とすると

$$\eta_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_k^2}{2} \right) - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad u_k^2 = u_k u_k = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = |\vec{u}|^2.$$

2.

以下の問いに答えよ。また、 \square には適した式または値を、それぞれ解答用紙に明記せよ。なお、 \square はすでに \square で与えられたものと同じものを表す。以下において、系の内部エネルギー、温度、エントロピー、圧力、体積をそれぞれ U, T, S, p, V とし、それぞれ2階微分が定義できるものとする。また、ボルツマン定数を $k, \beta = 1/(kT)$ とする。必要なら熱力学的状態量 x, y, z に対して成り立つ以下の関係を用いてもよい。重力の影響は無視する。

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 1 / \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$$

2-1

熱力学的平衡の条件は、与えられた条件や系の変化と矛盾しない任意の仮想的無限小状態変化に対して熱力学的状態量が極値をとることである。その平衡状態が安定であるための条件は、それに加えて、例えば以下の式(2.1)および式(2.2)が成立することである。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V > 0 \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T < 0 \quad (2.2)$$

式(2.1)が定積熱容量 $C_V > 0$ と等価であることを導け。なお、問い2で議論する他の過程での熱容量について、その熱容量が正となることは用いてよい。

2 - 2

N 個の互いに識別できない粒子からなる系の分配関数 Z は、古典統計力学では系のハミルトニアン H を用いて以下のように書かれる。

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \int \cdots \int dq_1 \cdots dq_N dp_1 \cdots dp_N e^{-\beta H(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)} \quad (2.3)$$

ここで、 h はプランク定数、 $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) はそれぞれ位相空間での粒子 i の一般化座標と一般化運動量である。以下の問いでは、 \mathbf{q}_i は粒子 i の空間座標 $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 、 \mathbf{p}_i はその運動量 $\mathbf{p}_i = (p_{ix}, p_{iy}, p_{iz})$ 、また、 $d\mathbf{q}_i = dx_i dy_i dz_i$ 、 $d\mathbf{p}_i = dp_{ix} dp_{iy} dp_{iz}$ とできる。

Z が決まれば、状態方程式は $p = kT \frac{\partial}{\partial V} \ln Z$ から導かれる。例えば、粒子間に相互作用がない単原子分子からなる理想気体の場合、体積を V とすれば、 $pV = NkT$ となる。

(1) 粒子間に相互作用がある実在気体として体積 V のアルゴンを考える。 H は全運動エネルギーと相互作用のポテンシャルエネルギーとの和であり、この系の分配関数 Z_{RG} は、 V に依存する Z_V と、それ以外の部分 Z^* との積で書かれる。また、十分に希薄であれば、 Z_V は、 T のみに依存するパラメータ B を用いて近似的に $Z_V \approx V^N - V^{N-1} N^2 B$ と書かれる。図 2-1 に B の概要を示す。 $|V^{-1} N^2 B| \ll 1$ として近似式 $\ln(1-x) \approx -x$ ($|x| \ll 1$) を使えば、状態方程式は $pV = NkT \left[1 + \boxed{\text{ア}} \right]$ となる。

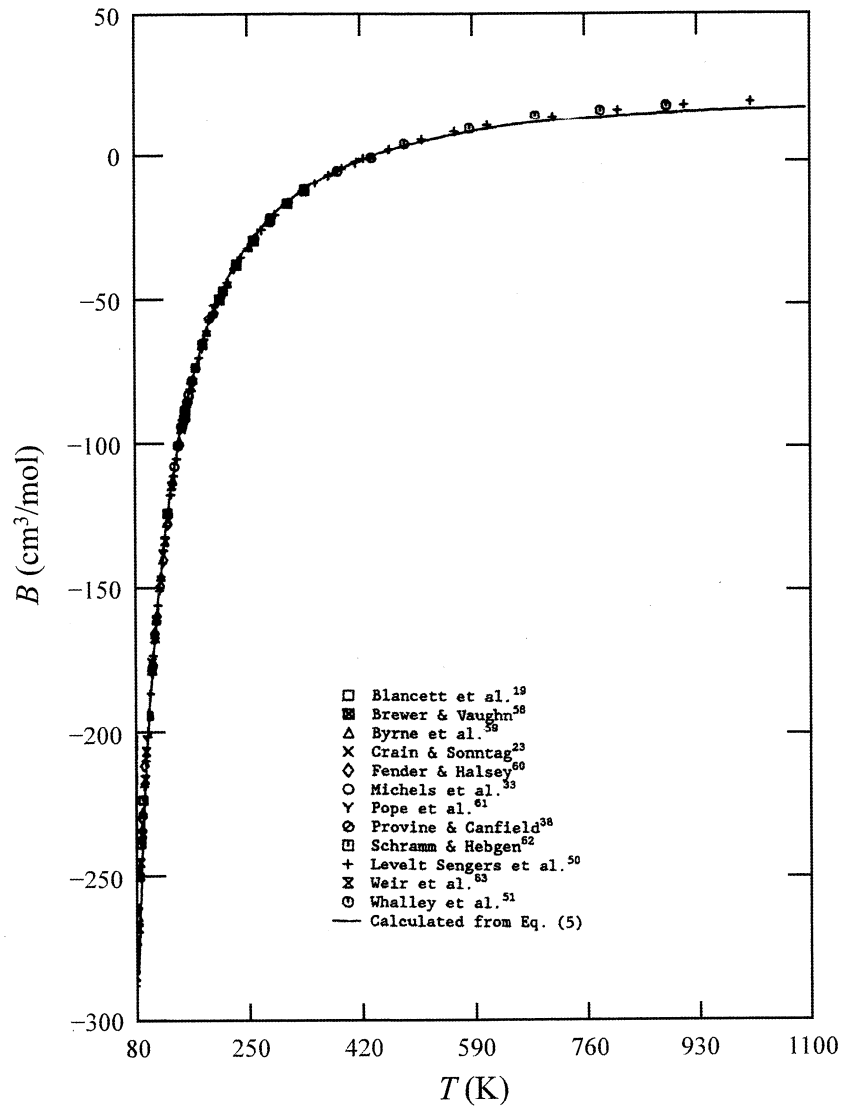


図 2-1 アルゴンの B の概要. R. Stewart and R. Jacobsen, J. Phys. Chem. Ref. Data, 18 (2), 639 (1989) より引用. 実験結果 (シンボル) と計算結果 (実線) が示されている.

次に、室温程度（300 K）の単原子分子からなる理想気体ならびに問い 2-2（1）のアルゴンが、それぞれ真空中へ断熱的に自由膨張する場合を考える。この過程では、 $dU = T dS - p dV$ が成立するものとする。

(2) U を T と V の関数とみなせるとき全微分は

$$dU = \boxed{\text{イ}} dT + \boxed{\text{ウ}} dV \quad (2.4)$$

であり、自由膨張に伴う温度変化は次式のように書かれる。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = -\frac{1}{(\partial U/\partial T)_V} \times \boxed{\text{ウ}} \quad (2.5)$$

(3) S を T と V の関数とみなせるときの全微分を用いて、式(2.5)から

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = \frac{1}{C_V} \times \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \right] \quad (2.6)$$

を導け。なお必要なら、以下のマクスウェルの関係式を使ってもよい。

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (2.7)$$

(4) $T, V, N, k, dB/dT, C_V$ などを用いると、式(2.6)は、理想気体の場合に $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = \boxed{\text{エ}}$ となり、また、アルゴンの場合に $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = \boxed{\text{オ}}$ となる。

(5) 問い 2-2（4）の結果にもとづいて、理想気体ならびにアルゴンの自由膨張における温度変化を議論せよ。また、その温度変化の理由をそれぞれについて 50 字程度で物理的観点から説明せよ。

2-3

一様で等方的な単位体積の常磁性体（磁化率 χ ）について考える．この常磁性体に対して，以下で示すような過程に従い，印加する磁場（磁場の強さ H ）を準静的に変化させる．

状態 A → 状態 B：磁場をゼロから H_B に増加させる等温過程

状態 B → 状態 C：磁場を H_B からゼロに戻す断熱過程

このとき常磁性体は H に応じて磁化する．この常磁性体の磁化の大きさ M と H の関係は $M = \chi H$ ($\chi > 0$) で与えられるとする．いずれの過程においても，体積変化は無視でき，ここで考える温度領域において， $\chi = C/T$ (C は正の定数) が成り立つとする．なお，この常磁性体の内部エネルギーは温度のみの関数である ($U = U(T)$)．また，体積変化が無視できるので磁化による内部エネルギーの変化は

$$dU = T dS + H dM \quad (2.8)$$

と書かれる．

(1) S を T と M の関数とみなせるとき全微分は，以下のようになる．

$$dS = \boxed{\text{力}} dT + \boxed{\text{キ}} dM \quad (2.9)$$

(2) 状態 A → 状態 B の過程でのエントロピー変化 ΔS_{AB} を求めよ．

(3) 状態 B → 状態 C の過程での磁場 H と温度 T の関係は

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = \frac{1}{C_H} \times \left[-T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right] \quad (2.10)$$

で与えられる．ここで

$$C_H = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H \quad (2.11)$$

(第2問 つぎのページにつづく)

である。式(2.10)にもとづいて、状態B→状態Cの過程での常磁性体の温度変化を議論せよ。

- (4) $S = S(T, H)$ と考えれば、その様子は図2-2のようになる。この図を解答用紙に書き写し、 $S = S(T, 0)$ と $S = S(T, H_B)$ が、それぞれ曲線I, IIのどちらになるかを示せ。さらに、状態A, 状態B, 状態Cを書き足し、状態Aから状態Cに至る過程を線で図示せよ。

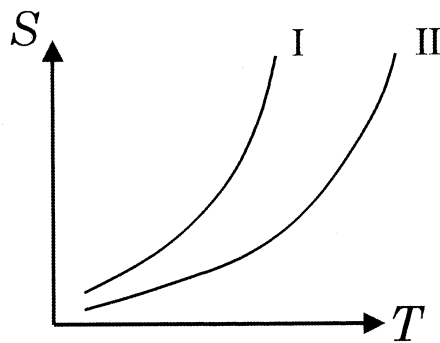


図2-2 S と T の関係.

3.

3-1

断面形状と材質が一様であり、幅 b 、高さ h の長方形断面をもつ長さ L の片持はりを考える。はりの縦弾性係数を E とする。

(1) このはりの曲げ剛性を導出せよ。

図 3-1 に示すように、このはりが右端で固定されているものとする。また、 x 軸と y 軸をそれぞれ、はりの長手方向および下方向にとり、はりの左端を $x = 0$ 、はりの断面における中立軸の位置を $y = 0$ とする。このはりに、大きさ $(wx)/L$ (w は正の定数) の分布荷重を下向きに与えた。

このはりについて、 xy 座標系における二次元問題として、以下の問いに答えよ。なお、はりに物体力は作用せず、はりの変形は微小とする。

(2) xy 座標系で定義した x 軸方向垂直応力、 y 軸方向垂直応力、せん断応力をそれぞれ、 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} とする。これらの応力成分の間には、一般的に平衡方程式が成り立つ。その平衡方程式を記せ (導出過程は問わない)。

(3) このはりにおける x 軸方向垂直応力の分布 $\sigma_x(x, y)$ を求めよ。なお、はりは十分に細長く、純曲げに対して導かれた曲げ応力 (x 軸方向垂直応力) と曲げモーメントの関係式が近似的に成り立つものとして求めよ。

(4) はりが横荷重を受けるとき、はりの断面には曲げモーメントによる曲げ応力とともに、せん断力によるせん断応力が生じる。このはりにおけるせん断応力の分布 $\tau_{xy}(x, y)$ を求めよ。

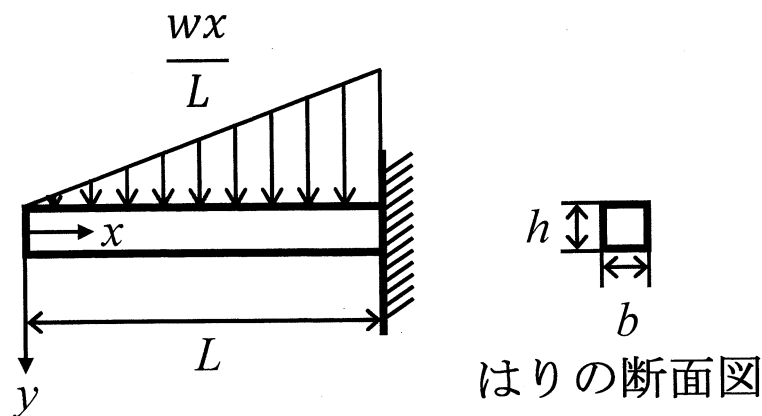


図 3-1

3-2

図3-2に示すように、断面形状と材質が一様で、変形前において真直な柱が鉛直に立てられており、その下端が固定されている。柱の長さは L であり、柱の曲げ剛性を EI （縦弾性係数 E 、断面二次モーメント I ）とする。また、 x 軸と y 軸をそれぞれ、鉛直方向および水平方向（図3-2に示した xy 座標系の向き）にとり、柱の下端を $x = 0$ 、変形前の柱の位置を $y = 0$ とする。

この柱の上端に圧縮荷重 P を与えるとき、Eulerの理論による柱の座屈に関して、以下の問いに答えよ。なお、 xy 座標系を定義した二次元平面における座屈のみを考えるものとする。以下の問いにおいて、圧縮荷重 P の負荷により変形した柱の y 軸方向変位の分布を $u(x)$ とし、柱の上端で y 軸方向変位 $u(L) = \delta$ ($\delta > 0$)が生じた変形状態を考える。柱の断面寸法は長さ L に比べて十分に小さく、柱に物体力は作用しないものとする。

- (1) 柱の x 軸方向の任意断面における曲げモーメント $M(x)$ を求めよ。なお、圧縮荷重の向きは変形前後で変化しないものとする。曲げモーメントが正となる向きは、柱が y 軸の正の方向に凸に変形する向きにとって答えよ。

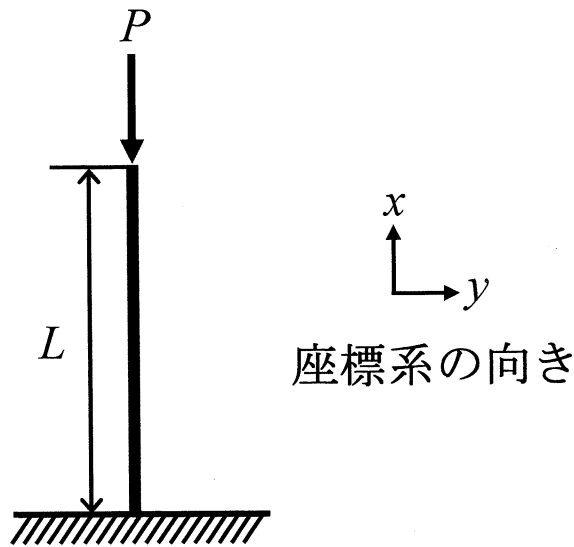


図3-2

(2) 柱の y 軸方向変位 $u(x)$ の一般解が

$$u(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \delta \quad (3.1)$$

で与えられることを示せ. ただし, A, B, α は定数である. また, 荷重 P と定数 α との間に成り立つ関係式を求めよ.

(3) 柱の境界条件を考えることにより, 式 (3.1) で与えられる柱の y 軸方向変位が, $u(x) \neq 0$ となる解を持つときの荷重 P を導出せよ. なお, このような解は複数存在し, 各解を与える荷重を以下の問いでは分岐荷重と呼ぶ.

(4) 座屈荷重 (最小の分岐荷重) を求めよ.

(5) 問い 3-2 (3) で求めた複数の分岐荷重のうち, 値が最小のものから順に 3 つの分岐荷重を考える. 各分岐荷重に対して現れる分岐モード (柱の y 軸方向変位分布 $u(x)$) の概形をそれぞれ図示せよ. なお, 図示するにあたっては, 各分岐荷重に対してそれぞれ, 図 3-3 を解答用紙に写したうえで, 関数 $u(x)$ を描き, $u(x) = 0$ となる x 座標を明示すること.

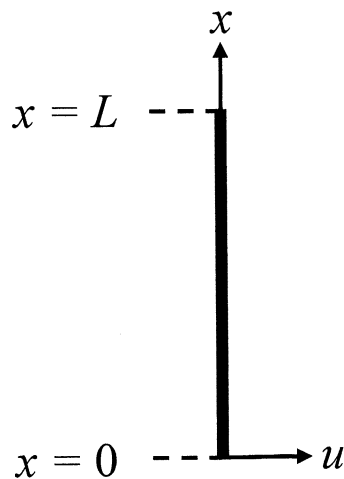


図 3-3

4.

4-1

図4-1は、ある制御系のブロック線図である。ただし、 r は目標値、 y は制御量、 d は外乱、 K は比例制御器の比例ゲイン、 $P(s)$ は制御対象の伝達関数であり次式であらわされるとする。

$$P(s) = \frac{e^{-Ls}}{Ts + 1}$$

ただし、 L 、 T は制御対象のパラメータである。 $L > 0$ 、 $T > 0$ 、 $K > 0$ であるとしたとき、以下の問いに答えよ。なお、問い4では時間を t とする。

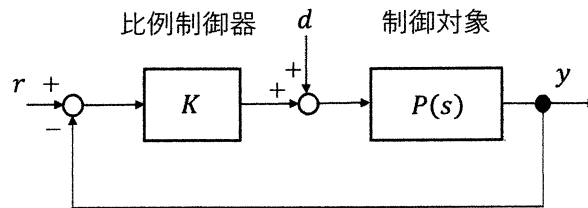


図4-1

- (1) 図4-1の閉ループ系が安定であると仮定して、 d を0、 r を単位ステップ関数としたとき、制御量の極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ を求めよ。
- (2) $P(s)$ に含まれる要素 e^{-Ls} を以下に示す伝達関数 $G_0(s)$ で近似する。 e^{-Ls} と $G_0(s)$ を $s = 0$ の周りでテイラー展開し、 s の2次の項まで一致させるためには、係数 a_0 、 b_0 をどのように選ばよいかを答えよ。

$$G_0(s) = \frac{b_0 s + 1}{a_0 s + 1}$$

4-2

図4-1で、制御対象の伝達関数を

$$P(s) = \frac{-as + 1}{(as + 1)(Ts + 1)} \quad (4.1)$$

としたとき、以下の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$ 、 $T > 0$ 、 $K > 0$ である。

- (1) 閉ループ系が安定となるために K が満たすべき条件を求めよ。
- (2) $T = 1, a = 1/2$ とし, K を 0 から ∞ まで変化させたときの根軌跡を調べる. 以下の点 (無限遠にあるときはその方向) を求め, これらを複素平面上に示して根軌跡を描け.
- (a) 根軌跡の出発点
 - (b) 根軌跡と虚軸との交点
 - (c) 根軌跡が実軸から離れる点と実軸に入る点
 - (d) 根軌跡の終点

ただし, 無限遠に至る根軌跡の方向については次の点に注意する. 閉ループ系の特性方程式を

$$\frac{(s + 1/a)(s + 1/T)}{(s - 1/a)} = cK$$

の形式にする. ただし, c は実数である. s の大きさが ∞ となる極限を考えたとき, 上式の左辺の偏角は s の偏角となる. 上式の右辺の符号が正であれば, 右辺の偏角は 0° となるので無限遠に至る根軌跡の方向は実軸の正の方向となる. また, 上式の右辺の符号が負であれば, 右辺の偏角は 180° となるので無限遠に至る根軌跡の方向は実軸の負の方向となる.

4-3

図4-1の閉ループ (ループ1) の外側に新たな閉ループ (ループ2) を持つ制御系を構成する (図4-2). ただし, r_1 はループ2の目標値, K_1 は積分ゲインで $K_1 > 0$, $P(s)$ は式 (4.1) の伝達関数であり, $T = 1, a = 1/2, K = 1$ とした. この閉ループ系に対して, 以下の問いに答えよ.

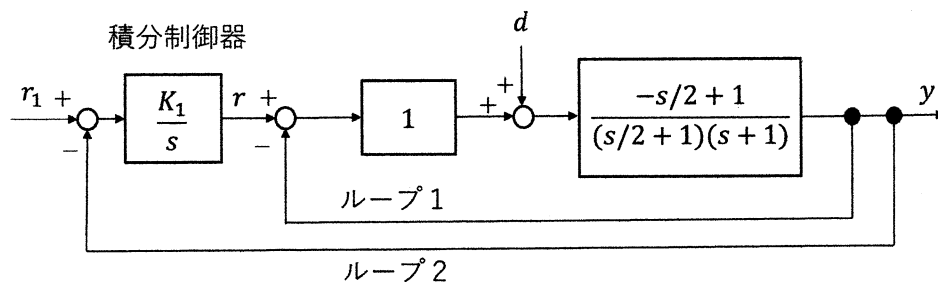


図4-2

- (1) d を0, r_1 を単位ステップ関数としたとき, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ が収束するために K_1 が満たすべき条件と収束値を求めよ.
- (2) $K_1 = 1$ とする. ループ1を制御対象とみなしたときのループ2のゲイン余裕を求めよ.
- (3) r_1 を0, d を単位インパルス関数, $K_1 = 1$ としたとき, 制御量の応答 $y(t)$ が単調関数であるかどうかを代表特性根に注意して判定せよ.