2022年8月5日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2023年度大学院修士課程入学試験問題

数学

（180点）

9:30～11:30

問題数 2問

注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと.

2．　問題２問すべてに解答せよ.

3．　万一落丁を見つけた場合には，手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること.

1．

実関数の内積を以下の式で定義する．

$$(f_1(x), f_2(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) f_2(x) dx. \tag{1.1}$$

関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + a_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x + a_2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \tag{1.2}$$

$$g(x) = b_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + b_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x + b_2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \tag{1.3}$$

とする．ここで，$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ は実定数である．以下の問いに答えよ．

1－1

$(f(x), g(x))$ を計算せよ．

1－2

演算子 $\hat{O}_1 = 2 + \dfrac{d}{dx}$ を考えると

$$(f(x), \hat{O}_1 g(x)) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

をみたす 3 行 3 列の実行列 $\boldsymbol{A}$ が存在する．$\boldsymbol{A}$ を具体的な値で示せ．

1－3

演算子 $\hat{O}_2 = 1 + 2\dfrac{d}{dx} + 2\dfrac{d^2}{dx^2}$ について，$(f(x), (\hat{O}_2)^3 f(x))$ を計算せよ．

1－4

次の微分方程式について考える．

$$\left(2\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^2}{dx^2}\right) f(x) = \lambda f(x). \tag{1.5}$$

境界条件は $f(\pi) = -1, f'(-\pi) = 0$ とし，λ は実定数とする．ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．この微分方程式が成立する全ての λ の値とそれぞれの λ に対応した a_0, a_1, a_2 の値を答えよ．

（第１問　つぎのページにつづく）

1－5

実定数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ を用いて関数 $g_n(x)$ を

$$g_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \tag{1.6}$$

と定義する．関数 $g_n(x)$ と 2π を周期とする次の関数

$$h(x) = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi), \qquad h(x+2\pi) = h(x) \tag{1.7}$$

との自乗平均誤差

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(h(x) - g_n(x))^2 dx \tag{1.8}$$

が最小となるように α_0, α_k, β_k $(k = 1, \dots, n)$ を決定する．このとき α_0, α_k, β_k $(k = 1, \dots, n)$ はフーリエ係数となっている．α_0, α_k, β_k $(k = 1, \dots, n)$ を計算するとともに，$\lim_{n\to\infty}(g_n(x), g_n(x))$ の値がいくらになるかを計算し，その過程を簡潔に説明せよ．

2．

2－1

（1）実変数 x の実関数 $f(x)$ は次の常微分方程式

$$f\frac{df}{dx}=\frac{d^2f}{dx^2}, \tag{2.1}$$

の有界な解で，$f(0)=0$ かつ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\mp 1$（複号同順）であるとする．$\dfrac{df^2}{dx}=2f\dfrac{df}{dx}$ の関係に注意して $f(x)$ を具体的に求めよ．なお，求解の際には $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{df}{dx}=0$ としてよい．

（2）問い2－1（1）の解 $f(x)$ を用いて $g(x)=af(a(x-b))+c$ とおく（$a>0$，b，c はそれぞれ実定数）．$g(x)$ が次の常微分方程式

$$(g-c)\frac{dg}{dx}=\frac{d^2g}{dx^2}, \tag{2.2}$$

を満たすことを示せ．また，$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$ の値を求めよ．

2－2

実変数 t，x の実関数 $u(t,x)$ に対する次の微分方程式を考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.3}$$

この方程式には $u(t,x)=V(\xi)$ という形［ここで $\xi=x-wt$（w は実定数）とおいた］で表される有界な解（進行波解とよぶ）があることが知られている．以下では，この進行波解で次の条件を満たすものを考える．

$$\begin{cases} u\to u_+ & (x\to\ \infty), \\ u\to u_- & (x\to -\infty). \end{cases}$$

ここで u_+，u_- は $u_->u_+$ を満たす実定数である．

（1）$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ を $V(\xi)$ を用いて表せ．

（2）式 (2.3) を $V(\xi)$ に対する常微分方程式に書き換えよ．

（3）$u(0,0)=\dfrac{1}{2}(u_++u_-)$ のとき，$V(\xi)$ を具体的に求めよ．また，w を u_+ および u_- を用いて表せ．

（第2問　おわり）