2022年8月5日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2023年度大学院修士課程入学試験問題

機械力学

（150点）

13:00～14:30

問題数 2問

注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと．

2．　問題２問すべてに解答せよ．

3．　万一落丁を見つけた場合には，手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること．

1．

図１－１のように，天井の小さな穴から糸を長さ l だけ垂らし，その下端に大きさの無視できる質量 m のおもりを吊り下げた振り子を考える．糸を穴から出し入れすることで，振り子の糸の長さを変えることができるとする．ただし，ことわらない限り，振り子の糸の長さは l に固定されている．糸は太さも質量も無視でき，伸び縮みしないものとする．振り子の運動において，糸はたるまないものとする．また，振り子の支点で糸を固定するための力，および，おもりに作用する重力を除いて，振り子には外力が作用しないものとする．重力加速度を g とする．鉛直下方からの糸の角度を θ とする．変数の上につけたドット$(\dot{\ })$は時間微分 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を表す．以下の問いに答えよ．

１－１

おもりの運動に対するラグランジアン $\mathcal{L}$ を求めよ．なお，位置エネルギーの基準点は，おもりが最下点にあるときとせよ．

１－２

問い１－１の結果を用いて，ラグランジュの方法により θ に関する運動方程式を求めよ．

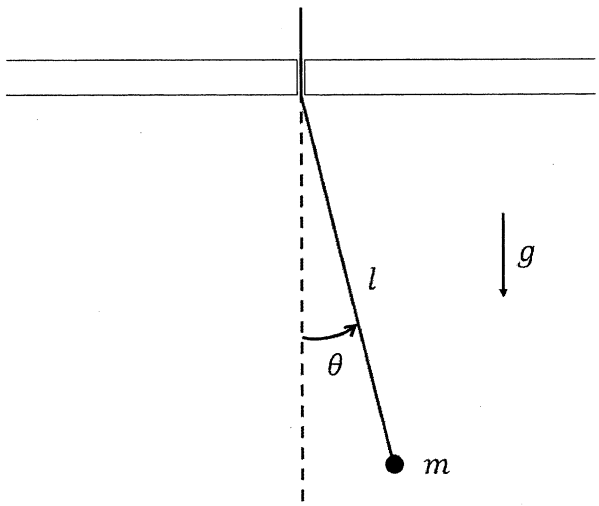

図１－１

（第１問　つぎのページにつづく）

次に，振り子の微小振動を考える．初期時刻 $t = 0$ において， $\theta = \theta_A$ （ $|\theta_A|$ は微小とする）， $\dot{\theta} = 0$ とする．振り子の力学的エネルギーを E ，振動の周期を T ， $|\theta|$ の最大値を θ_M と表す．必要であれば，近似式 $\sin\theta \approx \theta$ ， $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ を用いてよい．以下の問いに答えよ．

1－3

$\theta(t)$ を求めよ．

1－4

θ に共役な一般化運動量を p_θ とする． $p_\theta = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\theta}$ である．次の積分 J を求めよ．なお，積分記号 $\oint$ は，振り子の一周期にわたる定積分を表す．

$$J = \oint p_\theta \mathrm{d}\theta$$

1－5

J を E と T で表し，その導出過程も示せ．

1－6

振り子の糸の長さを l から l' に，振り子の周期と比べて十分にゆっくりと変化させた．このとき， J は一定に保たれる． E'/E ， T'/T ， θ'_M/θ_M をそれぞれ l'/l で表せ．なお，プライム ($'$)のついた変数の値は，糸の長さが l' のときの値である．

２．

図２―１に示すように，半径が R で均質な円柱が外力のはたらかない空間にある．円柱には，太さおよび質量が無視でき，伸び縮みしないワイヤが半径 R の円上に巻き付けられている．ワイヤの先端には質量が m で大きさが無視できる小物体が取り付けられている．時刻 $t<0$ では，小物体は円柱の側面上のある点に固定され，円柱，ワイヤ，小物体は一定の回転角速度 ω_0 で一体となって回転し，慣性系に対して並進運動はしていないとする．小物体の質量は円柱の質量に比べて十分に小さく，本問を通じて，回転軸は円柱の軸と一致するものとする．回転軸まわりの円柱の慣性モーメントを I とする．

時刻 $t=0$ において，小物体の固定を解き，自由にする．小物体の固定解除のために，円柱から小物体には力は作用しない．小物体の固定解除後，ワイヤはほどけ，それに伴って円柱の回転角速度は次第に変化する．図２―２は時刻 $t>0$ における系を回転軸方向からみた図である．O は円柱の断面円の中心とする．回転軸まわりの円柱の回転角速度を $\omega(t)$ とする．小物体が自由になる前に円柱に取り付けられていた位置へ O から延ばした軸を X 軸とする．回転軸を Z 軸，X 軸および Z 軸に直交する方向を Y 軸とする．また，y 軸をワイヤと円柱の接点を通る方向にとり，z 軸を回転軸，y 軸および z 軸に直交する方向を x 軸とする．座標系 $O-XYZ$ は円柱に固定された座標系であるが，座標系 $O-xyz$ は円柱に対して相対的に回転する座標系である．X 軸と y 軸のなす角を $\theta(t)$ とする．ワイヤは xy 平面および XY 平面内にあり，たるまずに y 軸に直交する．このとき，円柱から小物体までのびたワイヤの長さは $R\theta(t)$ に等しい．

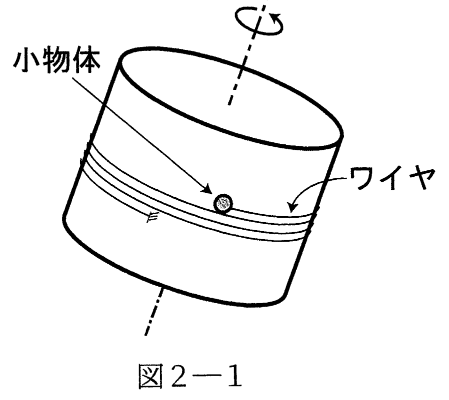

図２―１

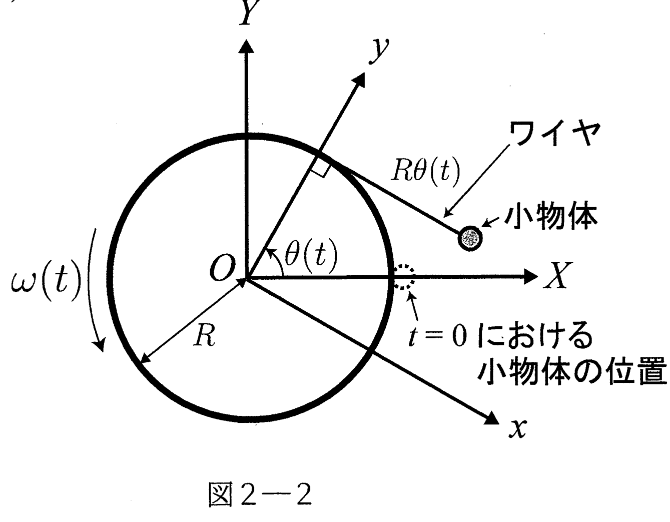

図２―２

以下の問いに答えよ．解答においてベクトルは座標系 $O-xyz$ において表示せよ．

2―1

小物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$，慣性系に対する座標系 $O-xyz$ の回転角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}(t)$ を $\omega(t)$ と $\theta(t)$ を用いて表せ．

2―2

慣性系からみた小物体の速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ を $\omega(t)$ と $\theta(t)$ を用いて表せ．

2―3

点 O まわりの小物体の角運動量ベクトル $\boldsymbol{h}(t)$，系全体の点 O まわりの角運動量ベクトル $\boldsymbol{H}(t)$ を $\omega(t)$ と $\theta(t)$ を用いて表せ．

2―4

系の運動エネルギー $T(t)$ を $\omega(t)$ と $\theta(t)$ を用いて表せ．

2―5

$\boldsymbol{H}(0)$, $T(0)$ を ω_0 を用いて表せ．それらと $\boldsymbol{H}(t)$, および $T(t)$ の間に成立する式を示せ．

2―6

問い２―５で得られた式より $\theta(t)$，$\omega(t)$ を求めよ．また，$\omega(t)=0$ となる時刻 t_f を求めよ．t_f は ω_0 により変化することを示せ．

2―7

円柱の回転を止めるために，$\omega(t)=0$ となったときに円柱からワイヤを切り離したい．ω_0 によらずにワイヤを切り離すタイミングを定める方法を示せ．ただし，$\theta(t)$，$\omega(t)$ の計測はできないものとする．