

2021年8月1日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2022年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

(1問100点 × 問題数4問 = 合計400点)

9:00～12:30

問題数 4問

注意事項

1. 問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 問題4問すべてに解答せよ。
3. 万一落丁を見つけた場合には、手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること。

1.

距離 $2D$ 離れた 2 枚の半無限平行平板の間に、粘性流体がある。この流体の定常な 2 次元流れを考える。図 1-1 に示すように、平板間の流路は $x \geq 0$ の部分にあるとし、入口中央に原点 O を選ぶ。平板に垂直な方向を y 軸とする。紙面に垂直な方向には、流速成分が無く、流体の状態は変化しない。外力は無く、流体の密度 ρ および粘性係数 μ は一定である。流速ベクトルを $(u(x, y), v(x, y))$ 、圧力を $p(x, y)$ と表すと、それらは次の式に従う。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (1.3)$$

$x = 0$ にある入口から、流体が一様な速さ U で流路に平行に流入する。入口から流入した後では一般に $v \neq 0$ であるが、十分に下流では流れが十分に発達し、 $x = L$ の近くおよび下流 $x > L$ では、どの場所でも $v = 0$ となっていた。このとき、以下の問いに答えよ。

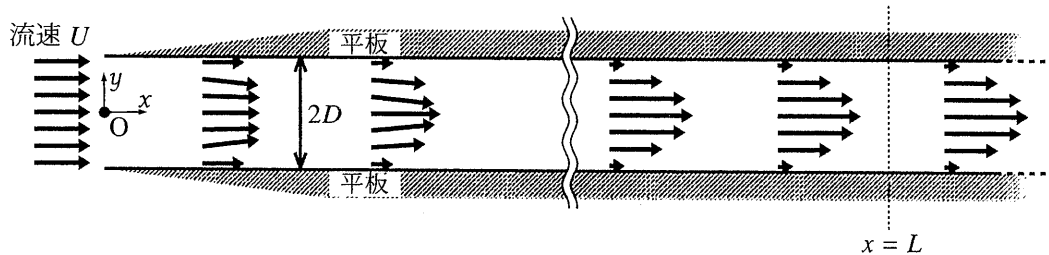


図 1-1

- (1) 式 (1.1)–(1.3) は、それぞれが、流体の物理量の保存を表している。式 (1.1)–(1.3) の名称を「・・・保存」という形式で書け。説明をつける必要はない。
- (2) $x \geq 0$, $y = \pm D$ の平板上では、流体は「粘着の条件」を満たすとする。流速が満たす式を書け。導出は不要である。
- (3) $x = L$ の近くおよび下流 $x > L$ においては、 x および y に依存しない定数 α, β を用いて

$$p = \alpha x + \beta,$$

と書けることを、式 (1.1)–(1.3) を用いて示せ。

- (4) 問い (3) の結果を用いると、 u の分布が定数 A を用いて

$$u = A(y^2 - D^2),$$

によって与えられることを示せ。また、 A を α, β, ρ, μ のうち必要なものを用いて表せ。

(5) 長方形領域 $0 \leq x \leq L$, $-D \leq y \leq D$ で式 (1.1) を積分することにより,

$$\int_{-D}^D u(L, y) dy = 2DU,$$

が成り立つことを示せ. さらに, この結果を用いて, 問い (4) の定数 A を U および D によって表せ.

(6) $0 \leq x \leq L$ の範囲の $v(x, y)$ の平均

$$V(y) = \frac{1}{L} \int_0^L v(x, y) dx,$$

を y, U, D, L を用いて表し, その結果を用いて流体の y 方向の動きを簡潔に説明せよ.
ヒント: 式 (1.1) を適当な領域で積分せよ.

(7) 式 (1.2) を $-D \leq y \leq D$ の範囲で積分してみよう. まず準備として

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

が成り立つことを示せ. これらを $-D \leq y \leq D$ の範囲で積分した結果を用いて, 式 (1.2) を積分した結果が, $x \geq 0$ において

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{-D}^D (\rho u^2 + p) dy \right] = \mu \left(\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_D - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{-D} \right),$$

となることを示せ. なお, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_a$ は, 二変数関数 $f(x, y)$ の y に関する偏微分の, 点 (x, a) における値である.

(8) 平板の $0 \leq x \leq L$ の部分が流体から受け取る力の, x 方向成分を調べよう. 2次元問題であるから, 紙面に垂直な方向の単位長さあたりの量を考える. それぞれの平板が受け取る量の合計 F を, $x = 0$ および L におけるそれぞれの断面平均圧力 p_0, p_L と, ρ, U, D によって表わせ. なお, 断面平均圧力の定義は

$$p_0 = \frac{1}{2D} \int_{-D}^D p(0, y) dy, \quad p_L = \frac{1}{2D} \int_{-D}^D p(L, y) dy,$$

である.

(9) 問い (8) の結果を, 問い (1) で述べた流体の物理量の保存の観点から説明せよ.

2.

理想気体およびその混合物について考える。

単成分の理想気体では、質量 m [kg] の気体についての状態方程式は

$$pV = mRT \quad (2.1)$$

と表される。ここで、 p [Pa] は圧力、 V [m³] は体積、 R [J/(kg·K)] は気体の種類によって決まる気体定数、 T [K] は温度(絶対温度)である。気体の量をモル数で表す場合には、 n [mol] の気体について

$$pV = nR_0T \quad (2.2)$$

となる。 R_0 は一般気体定数であり、気体の種類によらず $R_0 \cong 8.314$ J/(mol·K) である。

2-1

理想気体を混合する際のエントロピー変化について考える。

- (1) まず、質量 m [kg] の単成分理想気体のエントロピーの表式を導こう。内部エネルギーを U [J]、エントロピーを S [J/K] とすると、熱力学第一法則は次の式(2.3) のように表現される。

$$dU = TdS - pdV \quad (2.3)$$

この式を変形すると

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV \quad (2.4)$$

となる。定積比熱容量 c_v [J/(kg·K)] および状態方程式 (2.1) を用いると、

$$dS = mc_v \boxed{(a)} + mR \boxed{(b)} \quad (2.5)$$

と表すことができる。 $\boxed{(a)}$ 、 $\boxed{(b)}$ にあてはまる数式を書け。

- (2) ある温度 T_0 と体積 V_0 を基準状態とし、式(2.5) を積分してエントロピーの表式 $S(T, V)$ を求める。理想気体の比熱容量は体積に依存せず、またこの積分の範囲内では温度にも依存しないと仮定すると、次式が得られる。

$$S(T, V) = mc_v \boxed{(c)} + mR \boxed{(d)} + S(T_0, V_0) \quad (2.6)$$

$\boxed{(c)}$ 、 $\boxed{(d)}$ にあてはまる数式を書け。

- (3) 図2-1に示すように、仕切りのある容器に2種類の理想気体 A と B が別々にはいっており、仕切りを取り除くことで A と B を断熱条件の下で混合する。混合前後でのエントロピーの変化を式(2.6) に基づいて考える。計算を簡単にするため、混合前の両気体は温度 T 、体積 V 、圧力 p が等しいとする。このとき、混合後の気体の温度と圧力は混合前と変わらず、体積が $2V$ となる。混合前後でのエントロピー変化 ΔS は、それぞれの気体のエントロピー変化の和であり、式(2.6) より

$$\begin{aligned} \Delta S &\equiv [S_A(T, 2V) - S_A(T, V)] + [S_B(T, 2V) - S_B(T, V)] \\ &= m_A R_A \boxed{(e)} + m_B R_B \boxed{(f)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

(第2問 つぎのページにつづく)

となる。ただし気体 $i (= A, B)$ の気体定数, 質量, エントロピーをそれぞれ R_i, m_i, S_i と表記する。□(e), □(f) にあてはまる数式を求め, 「可逆過程, 不可逆過程」の観点から ΔS の物理的意味を簡単に議論せよ。

- (4) 問い(3)において, もし, 2 種類の気体 A と B が全く同じもの(例えばどちらも窒素)であった場合は, この混合操作をおこなっても巨視的な状態は変化しないはずである。このときのエントロピー変化を式(2.6)に基づいて求め, 問い(3)で得られたエントロピー変化との違いを簡単に議論せよ。

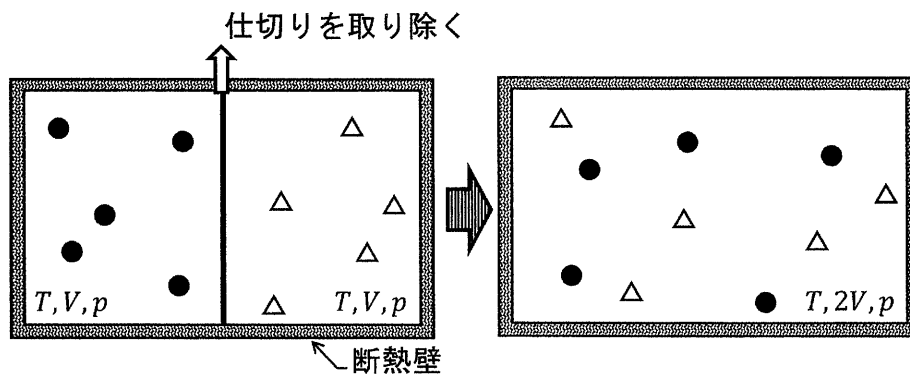


図2-1 理想気体の混合過程の模式図 (●:気体 A, △:気体 B)。

2-2

新型コロナウイルス感染症の治療のために, 世界中で数多くの「酸素濃縮器」が使われている。これは空気をとりこんで, 酸素濃度を高めた気体を排出できる装置である。いくつかのタイプがあるが, ここでは, 「固体への気体吸着現象を利用する酸素濃縮器」について, 熱力学の観点から考察しよう。これは, 同じ温度・圧力条件下で, 酸素に比べて窒素をよく吸着するような固体物質を利用するもので, ゼオライトとよばれる無機物質多孔体などがよく用いられる。図2-2は, あるゼオライトについての窒素吸着の実験データ例である。これは, 単位質量(1 kg)のゼオライトに対する窒素の吸着量を測定したもので, 窒素の圧力 p_N が高いほど多くの窒素が吸着されることを示している。この図では, 吸着量 n'_N はモル単位で表示されている。以下では, 気体中の窒素量と区別するため, 吸着量を表す記号には ' をつけている。実際には酸素も吸着されるがその量は窒素に比べて少ないので, ここでは酸素吸着は考えない。また, 空気中の酸素の存在が窒素吸着に与える影響も無視できるとする。

このようなゼオライトの気体吸着を利用した酸素濃縮器の動作原理を, 次のように単純化したシリンダ-ピストン系のサイクルとして考察する。シリンダには 1 kg のゼオライトが封入されているとする。また, すべての過程は等温変化とする。

(第2問 つぎのページにつづく)

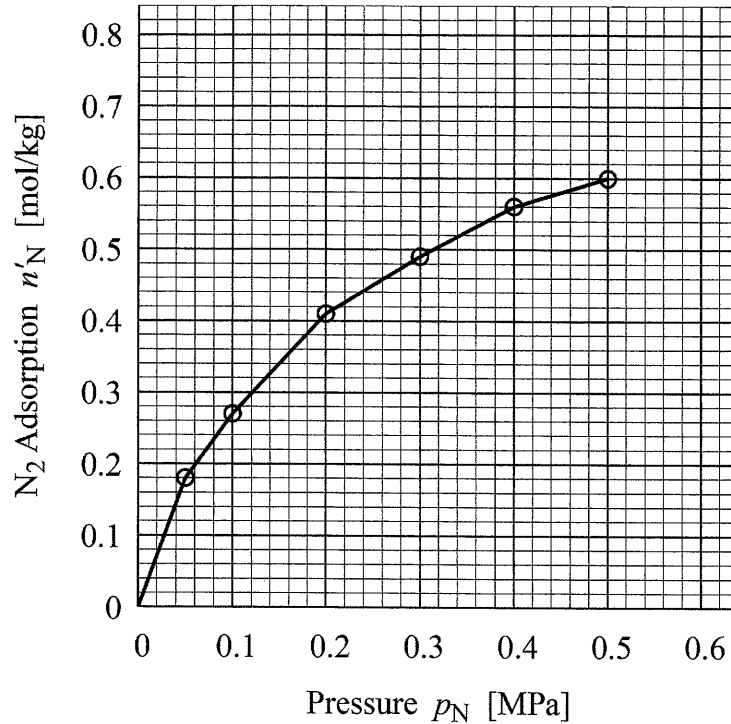


図2-2 25°C (298.15 K)における窒素気体のゼオライト 1 kg への吸着量の測定例.

出典:高坂彬夫・飯岡勝・白井和憲・松田良弘,「材料」, vol. 42, no. 482, pp. 1282-1285 (1993) 記載のデータを描き直した.

- 状態①: 一定容積 V_0 [m^3] のシリンダを大気開放し, 空気で満たして平衡状態とする. 大気圧は $p_1 = 0.10$ MPa とする.
- ステップ a: シリンダ内の空気を等温的に圧縮する. その圧縮比を $\varepsilon (> 1)$ とする. すなわち圧縮後の体積は $\varepsilon^{-1}V_0$ である. これを状態②とする. ただし, 圧縮中の新たな窒素吸着は無視できるとする.
- ステップ b: 封入されているゼオライトによって, 圧縮された空気中の窒素がゆっくりと吸着される. その結果, シリンダ内の気体の酸素濃度が相対的に高くなる. 吸着が平衡に達した状態を状態③とする.
- ステップ c: シリンダから酸素濃縮された状態③の気体をすべて取り出したのち, 大気開放する. 表面吸着していた窒素は大気開放されるとゆっくりと脱離し, 状態①に戻る.

このサイクルによる酸素濃縮について, 以下の問いに答えよ. ただし, 空気は窒素 (N_2) と酸素 (O_2) の混合物(組成は, モル比で $N_2:O_2 = 4:1$)と仮定し, それ以外の成分は考えない. また, すべての気体は理想気体として扱えるものとする. なお, 計算結果を数値で答える問いでは, 計算の過程の概略を示したうえで, 有効数字2桁まで求めよ. 必要であれば, 表2-1の数値を用いよ.

(第2問 つぎのページにつづく)

表2-1:自然対数表(小数点以下3桁まで).

x	$\log x$
2	0.693
3	1.099
5	1.609
7	1.946

- (1) この酸素濃縮器では, ステップ a で空気を状態①から状態②に圧縮する際に外部から仕事をする必要がある. その仕事(絶対仕事)の大きさを, 大気圧 p_1 , 状態①の空気の体積(シリンダ容積) V_0 , および圧縮比 ε を用いて表せ.

状態③で得られた気体の組成(酸素濃縮の程度)を求めるため, 次のような考察をおこなう.

- (2) ステップ a で空気を圧縮した直後のゼオライトには, 大気圧下で吸着された窒素のみが存在する. 1 kg のゼオライトが封入されているシリンダを考えているので, その量(吸着モル数) $n'_{N②}$ は 図2-2 から, $\boxed{\text{(g)}}$ mol 程度とわかる. $\boxed{\text{(g)}}$ に当てはまる数値を答えよ.
- (3) 圧縮直後の状態②では, それぞれの気体の分圧は, 酸素が $p_{O②} = 0.2\varepsilon p_1$, 窒素が $p_{N②} = 0.8\varepsilon p_1$ である. ステップ b で吸着が進行していくと, 酸素の分圧は変わらず, 窒素の分圧は新たに吸着された分だけ $p_{N②}$ より低下する. 新たな窒素吸着量($n'_{N②}$ からの増加量)を $\Delta n'_N$ [mol] とすると, そのときの窒素の分圧 p_N は, 次のように $\Delta n'_N$ の1次式で表すことができる:

$$p_N = p_{N②} - \boxed{\text{(h)}} \Delta n'_N \quad (2.8)$$

$\boxed{\text{(h)}}$ にあてはまる数式を, R_0 , T , p_1 , $p_{N②}$, V_0 のうち必要な記号を用いて表せ.

以下, 具体的な例として, 容積 $V_0 = 10^{-2} \text{ m}^3 (= 10^{\text{リットル}} \text{ L})$ のシリンダに 1 kg のゼオライトが封入されている装置を考える. ただしゼオライトの体積は V_0 に含まれない. 温度は図2-2の実験と同じく $T = 25^\circ\text{C}$ (298.15 K) とし, また圧縮比は $\varepsilon = 6$ とする.

- (4) 大気圧下にある状態①では, シリンダ内の窒素気体の量 $n_{N①}$ は, 理想気体の状態方程式 (2.2) より

$$n_{N①} = \frac{0.8 p_1 V_0}{R_0 T} = \frac{0.8 \times 10^5 \text{ Pa} \times 10^{-2} \text{ m}^3}{8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \times 298.15 \text{ K}} \cong 0.323 \text{ mol}$$

であり、これは圧縮直後の状態②でも変わらない。状態③での窒素吸着量と窒素圧力(分圧)を求めるためには、図2-2上に式(2.8)に対応するグラフを重ねて描き、図2-2の曲線との交点を求めればよい。窒素の圧力 p_N と吸着量 $n'_N (= n'_{N②} + \Delta n'_N)$ を表す図においては、式(2.8)

に対応するグラフは次の2点を通る直線となる：

○点ア (状態②)： n'_N は大気圧下ですでに吸着されているものだけなので、 $p_N = p_{N②} = 0.8\varepsilon p_1 = 0.48 \text{ MPa}$ であり、 $n'_N = \boxed{\text{(i)}}$ である。

○点イ (仮に、シリンダ内のすべての窒素が吸着された場合)： $p_N = 0$ であり、このとき $n'_N = \boxed{\text{(j)}}$ となる。

$\boxed{\text{(i)}}$ および $\boxed{\text{(j)}}$ に当てはまる数式を、記号 $n'_{N②}$ 、 $n_{N①}$ を用いて表せ。

- (5) 問題冊子の図2-2の上で、問い(4)に基づく作図をおこない、状態③での窒素分圧 $p_{N③}$ を有効数字2桁で求めよ。また、解答用紙に図2-2の概略を描き、 $p_{N③}$ を求める作図方法を簡単に示せ。この概略図には詳細な目盛りや方眼を記入する必要はないが、座標軸上に圧縮直後の状態②での窒素圧力 $p_{N②}$ と吸着量 $n'_{N②}$ を明示し、また、点アと点イを記入せよ。
- (6) 酸素は全く吸着されないと仮定しているため、状態③の酸素分圧 $p_{O③}$ は状態②と同じく $p_{O③} = 0.2\varepsilon p_1 = 0.12 \text{ MPa}$ である。状態③での酸素濃度 $\frac{p_{O③}}{p_{O③} + p_{N③}}$ を数値で求めよ。
- (7) この方法により酸素濃縮された気体を生成するのに必要な仕事は、ステップ a での等温圧縮のための仕事のみとする。毎分 $10^{-1} \text{ m}^3 (= 100 \text{ L, ただし大気圧下での体積})$ ずつこの気体を生成するときの仕事率を数値で求めよ。
- (8) 酸素濃度をさらに高めるための装置改良の方法を2つ挙げ、それぞれ簡単に説明せよ。

3.

3-1

外径 $2R$ 、肉厚 t の薄肉円筒（内筒）と内径 $2R - \delta$ 、肉厚 t の薄肉円筒（外筒）を焼ばめにより結合することを考える。 t/R は 1 よりも十分に小さいものとする。外筒と内筒ともに両端が開放されている。 δ は焼ばめ代（変形前の内筒の外径と外筒の内径の差）であり、 $\delta/(2R)$ は 1 よりも十分に小さいものとする。外筒を加熱して膨張させ、図 3-1 に示すように内筒を挿入した後、元の温度まで冷却して両円筒を結合させた。内筒と外筒はともにヤング率 E 、ポアソン比 ν の等方性弾性体である。円筒間の摩擦力は無視できるものとする。また、両円筒は z 方向（軸方向）に十分に長く上下端から十分に離れた位置の変形について考える。半径方向を r 方向、円周方向を θ 方向とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 内筒と外筒の接触圧力を p として、内筒と外筒にそれぞれ生じる円周方向応力 σ_θ 、軸方向応力 σ_z 、および半径方向変位 u を求めよ。
- (2) 結合した組合せ円筒に生じる接触圧力（焼ばめ圧力） p_Q を求めよ。

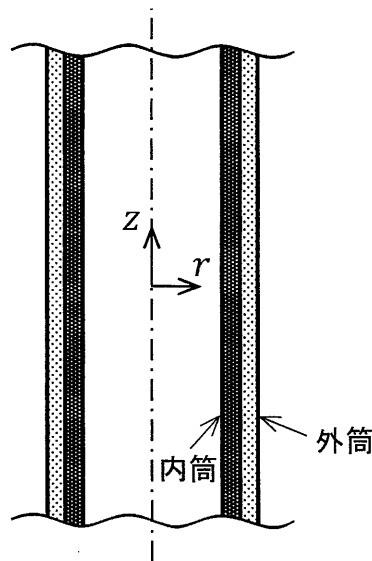


図 3-1

3-2

図3-2に示すように、断面形状と材質が一様であり、曲げ剛性が EI 、長さが L であるはりABCに、単位長さあたり w の等分布荷重が作用している。左端（点A）から距離 a の位置にある支点Bは移動支持され、右端（支点C）は回転支持されている。以下の問いに答えよ。

- (1) 支点BとCに生じる反力 R_B と R_C を求めよ。
- (2) 点Aからの距離 x ($0 \leq x \leq L$)におけるはりのたわみ $y(x)$ を求めよ。ただし、 $y(x)$ は下向きを正とする。
- (3) 点Aのたわみ $y(0)$ が0となる支点Bの位置 a を求めよ。ただし、 $a > 0$ とする。

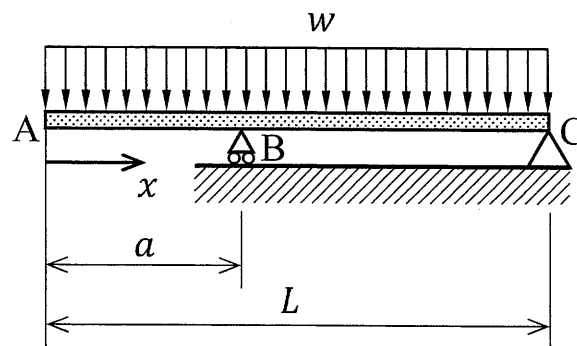


図3-2

つぎに、図3-3に示すように、はりABCと棒BDがはりの中央の点Bでピン結合（滑節）されている構造を考える。はりABCと棒BDはそれぞれ支点CとDで壁面にピン結合されており、支点Dは支点Cから上方に距離 $(\sqrt{3}/2)L$ 離れている。はりABCは、断面形状と材質が一樣であり、曲げ剛性が EI 、長さが L である。棒BDは、断面形状と材質が一樣であり、引張剛性が EA 、長さが L である。以下の問いに答えよ。

- (4) はりABCに単位長さあたり w の等分布荷重が作用したとき、点Aおよび点Bに生じる下向きの変位 y_A と y_B を求めよ。ただし、はりABCの軸力による変形は無視できるものとする。

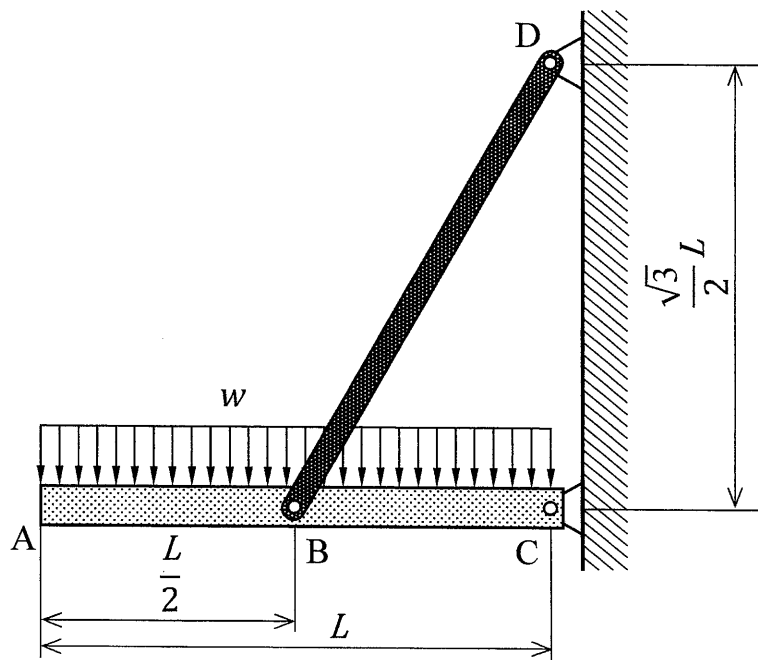


図3-3

4.

4-1

図4-1のブロック線図において r から y までの伝達関数 $G_{yr}(s)$ を $G_1(s), G_2(s), G_3(s)$ を用いて表せ。

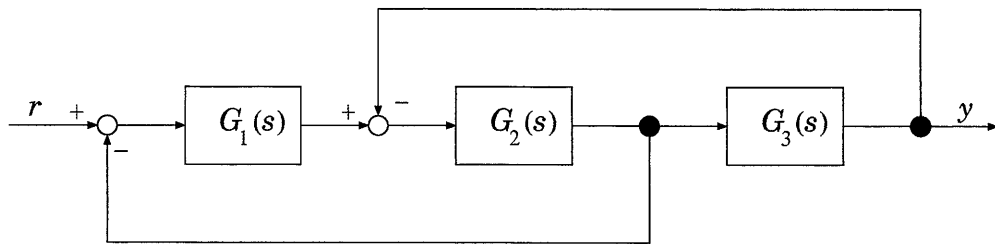


図4-1

4-2

次の伝達関数 $G(s)$ で表される安定な系のステップ応答が、時刻に関して単調増加となるために実数 k が満たすべき条件を求めよ。その導出過程も数式を用いて説明すること。

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + k}$$

4-3

次の制御対象 $P(s)$ と制御器 $C(s)$ からなる，図4-2に示すような制御系を考える。このとき，以下の設問に答えよ。ただし a, b, c は実数とする。

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad C(s) = c \frac{s+b}{s+a}$$

- (1) 図の閉ループ系において r から y までの伝達関数 $G_{yr}(s)$ を求め， $G_{yr}(s)$ が安定になるために a, b, c が満たすべき条件を求めよ。さらに， $c > 0$ としてその範囲を a - b 平面上に図示せよ。この範囲の a, b, c には，実際の制御には適さないものが含まれている。制御に適さない理由とその範囲を答えよ。
- (2) 閉ループ系は安定であるとする。この系に目標値信号 r として単位ステップ信号 $r(t) = 1 (t > 0)$ を入力したときの追従偏差 $e = r - y$ の極限 $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ を求めよ。またこの e_∞ の大きさをできるだけ小さくするには，設計パラメータ a, b, c をどう選べばよいか，答えよ。
- (3) ナイキストの安定判別法は以下の通りである。変数 s を複素平面上のある閉路 Γ_s に沿って一周させたとき，開ループ伝達関数 $L(s) = P(s)C(s)$ が描く軌跡 Γ_L をナイキスト線図と呼び，その形状から閉ループ系の安定性を調べることができる。いま制御器のパラメータを $a = 0, b = 1, c = 2$ としたとき， Γ_s と Γ_L の概略図を示し， Γ_s と Γ_L の各曲線のどの部分が互いに対応しているかを説明せよ。その際，実軸・虚軸との交点や漸近線など作図に必要な情報があればそれらも示せ。さらに閉ループ系の安定性をナイキストの安定判別法を用いて調べよ。
- (4) 前問で求めたナイキスト線図を用いて，この閉ループ系の安定余裕として以下の (a), (b) を求めよ。
 - (a) 制御対象 $P(s)$ が k 倍 ($k > 0$) された場合に，閉ループ系の安定性が損なわれない k の上下限の値 (ゲイン余裕)
 - (b) 制御対象 $P(s)$ の位相が θ だけ遅れた場合に，閉ループ系の安定性が損なわれない θ の上下限の値 (位相余裕)

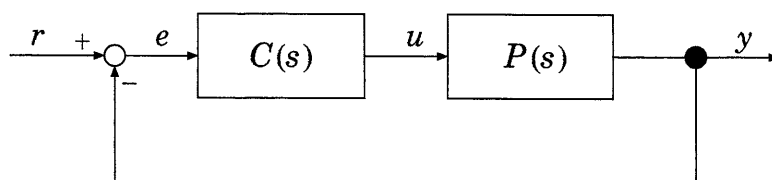


図4-2

(第4問 おわり)