2021年7月31日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

# 2022年度大学院修士課程入学試験問題

# 数学

（180点）

9:30～11:30

**問題数 2問**

## 注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと.
2．　問題２問すべてに解答せよ.
3．　万一落丁を見つけた場合には，手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること.

1．

デカルト座標系 $xyz$ において，任意の実ベクトル $\boldsymbol{v}$ を，原点を通り向きが単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表される軸のまわりに角度 $\theta$ 回転したベクトルを $\boldsymbol{v}'$ とする．$\theta$ の符号は，$\boldsymbol{n}$ の向きに進む右ねじが回転する向きを正とする．以下の問いに答えよ．

1－1 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角を $\alpha$ とするとき，$\cos\alpha$ を $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{n}$ を用いて表せ．

1－2 $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{n}$ に平行なベクトル $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ 及び垂直なベクトル $\boldsymbol{v}_{\perp}$ に分けて $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\parallel} + \boldsymbol{v}_{\perp}$ と表し，ベクトル $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{v}_{\perp}$ の外積 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}_{\perp}$ とする．$\boldsymbol{v}_{\parallel}$，$\boldsymbol{v}_{\perp}$，$\boldsymbol{w}$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{n}$ を用いて表せ．

1－3 $\boldsymbol{v}'$ を $\boldsymbol{v}_{\parallel}$，$\boldsymbol{v}_{\perp}$，$\boldsymbol{w}$，$\theta$ を用いて表せ．

1－4 $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{v}' = R_1(\theta)\boldsymbol{v}$ の関係を満たす行列 $R_1(\theta)$ を求めよ．

1－5 $k$ を自然数とするとき，前問の $R_1(\theta)$ について，$[R_1(\theta)]^k$ の行列式と逆行列を求めよ．

1－6 $\boldsymbol{v}' = R_2\boldsymbol{v}$ の関係を満たす行列 $R_2$ が以下の式で与えられるとき，$\boldsymbol{n}$ 及び $\theta$ を求めよ．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$ とする．

$$R_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}5 & \sqrt{3} & 6\\ \sqrt{3} & 7 & -2\sqrt{3}\\ -6 & 2\sqrt{3} & 4\end{pmatrix}$$

（第１問　おわり）

2．

2－1

以下の問いに答えよ．ただし，$i$ は虚数単位である．

（1）$x$ を実数，$a$，$R$ を正の実定数，$z$ を複素数とする．図2－1に示した長方形の周囲を反時計まわりに一周する積分路 $C$ に沿って，複素積分

$$\oint_C e^{-z^2}\,dz \qquad (2.\ 1)$$

を考えることにより，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(ax)\,dx = \sqrt{\pi}e^{-a^2/4} \qquad (2.\ 2)$$

を示せ．ただし，必要であれば，次の積分公式を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \qquad (2.\ 3)$$

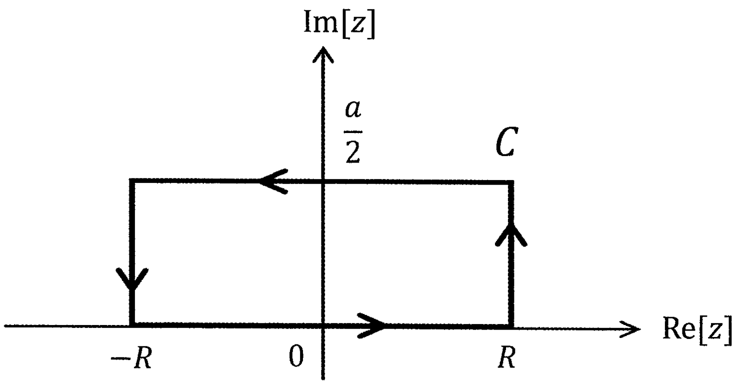


図2－1

（2）$x$，$\omega$ を実数，$\lambda$ を正の実定数とする．区分的に連続でなめらか，かつ絶対可積分な関数 $f(x)$ に対して，$f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]$，$F(\omega)$ のフーリエ逆変換 $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$をそれぞれ，

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \qquad (2.\ 4)$$

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega \qquad (2.\ 5)$$

で定義する．関数 $p(x)=e^{-\lambda x^2}$ のフーリエ変換 $P(\omega)$ を求めよ．なお，必要であれば，問い2－1（1）の結果を用いてもよい．

（第2問　つぎのページにつづく）

２－２

実変数 $x, t$ （$-\infty < x < \infty,\ t > 0$）の実数値関数 $u(x,t)$ が，次の微分方程式，初期条件を満たすものとする．ここで，$g(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で定義される実数値関数である．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (D\text{ は正の実定数}) \tag{２．６}$$

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = g(x) \tag{２．７}$$

ただし，$u(x,t)$，$g(x)$ について，以下の（ｉ）－（ⅳ）を仮定する．

（ｉ）$u(x,t)$，$g(x)$ は，ともに問い２－１（２）において $\mathcal{F}$ として定義した $x$ に関するフーリエ変換（以降，フーリエ変換 $\mathcal{F}$ と表記する）が可能で，それぞれのフーリエ変換が $U(\omega,t)$，$G(\omega)$ で表される．

（ⅱ）$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ は，ともにフーリエ変換 $\mathcal{F}$ が可能である．

（ⅲ）$u(x,t)$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ は，ともに $x \to \pm\infty$ で 0 に収束する．

（ⅳ）フーリエ変換 $\mathcal{F}$ に対して，次の等式が成り立つ．

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F}[u]) \tag{２．８}$$

$$\mathcal{F}\left[\lim_{t\to+0} u\right] = \lim_{t\to+0}\mathcal{F}[u] \tag{２．９}$$

以下の問いに答えよ．

（１）問い２－１の式（２．４）を使って，

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right], \qquad \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$$

をそれぞれ求めよ．ただし，$\omega$，$U(\omega,t)$ を用いてもよい．

（２）$U(\omega,t)$ を $\omega$，$t$，$D$，$G(\omega)$ を用いて表せ．

（３）$g(x) = e^{-\xi x^2}$ （$\xi$ は正の実定数）のときに，$u(x,t)$ （$t > 0$）を求めよ．ただし，必要であれば，問い２－１の結果を用いてもよい．

（第２問　おわり）