2021年7月31日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2022年度大学院修士課程入学試験問題

機械力学

（150点）

13:00～14:30

問題数 2問

注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと．
2．　問題２問すべてに解答せよ．
3．　万一落丁を見つけた場合には，手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること．

1．

図１－１に示すような２個の鉄球を溶接した連結球を作って，水平で滑らかな床の上で適当な条件で回転させると，連結球は図１－２に示すように運動する．すなわち，片方の球が床と接しながらもう一方の球が床から浮き上がり，連結球の質量中心を通り床に垂直な軸と回転対称軸のまわりでコマのように回転運動する．

このような連結球の運動を以下のモデルに基づいて考える．連結球を構成する球は，それぞれ半径 R，質量 M の一様な密度の剛体球とする．溶接部分は十分小さく運動には影響しない．また十分な強度を持っているため，連結球を１つの剛体とみなすことができる．

連結球に固定された $x_1x_2x_3$ 座標系の各軸は，図１－１のように連結球の慣性主軸と一致し，原点は連結球の質量中心にある．３つの軸のうち x_3 軸が，連結球の回転対称軸に一致している．連結球の姿勢は図１－３に示すように，$x_1x_2x_3$ 座標系が xyz 座標系にたいして各瞬間にとるオイラー角で表される．ここで，xyz 座標系は $x_1x_2x_3$ 座標系と原点を共有し，z 軸が床に垂直で，x 軸と y 軸の向きは空間の特定の方向に固定されている．そして，z 軸まわりの角 ϕ の回転で x 軸と y 軸がそれぞれ ξ 軸と η 軸に移り，ξ 軸まわりの角 θ の回転で z 軸が x_3 軸に，η 軸が η' 軸に移り，さらに x_3 軸まわりの角 ψ の回転で ξ 軸と η' 軸がそれぞれ x_1 軸と x_2 軸に移るものとして，連結球の姿勢を３つの角 ϕ，θ，ψ で表す．θ の取りうる範囲は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする．また，ϕ，θ，ψ の時間微分をそれぞれ $\dot{\phi}$，$\dot{\theta}$，$\dot{\psi}$ とする．

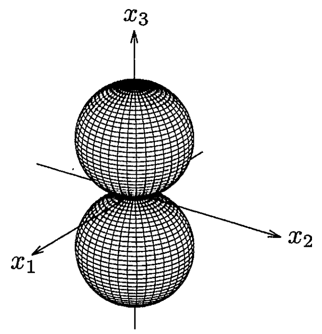

図 １－１: 連結球の模式図．

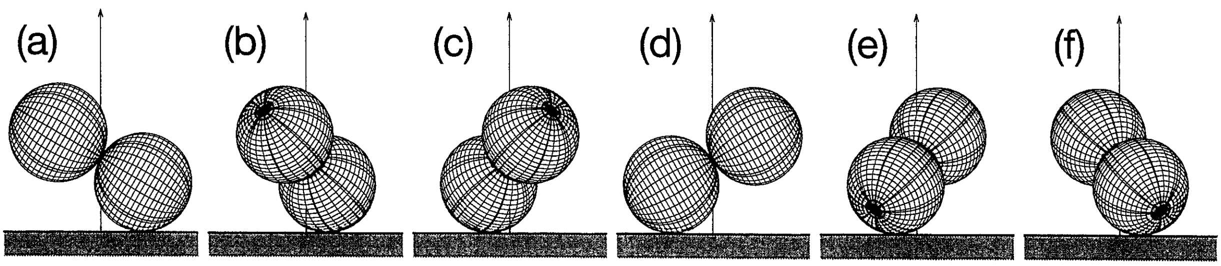

図 １－２: 床の上で傾斜して回転する連結球を水平方向からみた模式図．この例では時間発展とともに連結球の姿勢が (a) から (f) への変化を繰り返す．

（第１問　つぎのページにつづく）

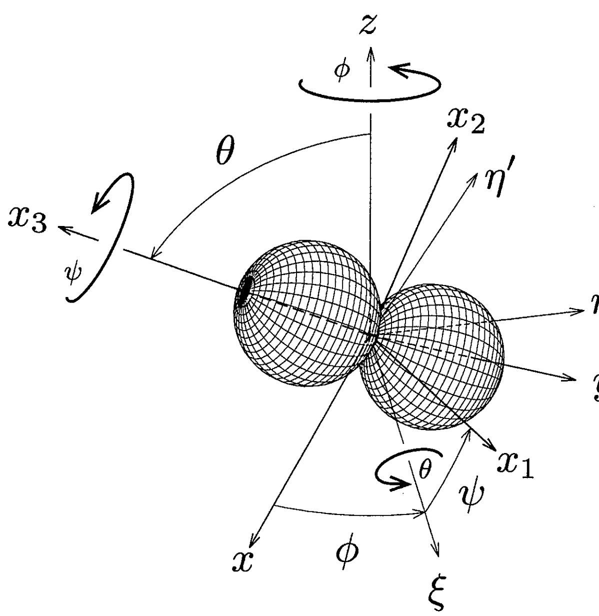

図 1－3: 連結球の姿勢を表すオイラー角 ϕ, θ, ψ の定義.

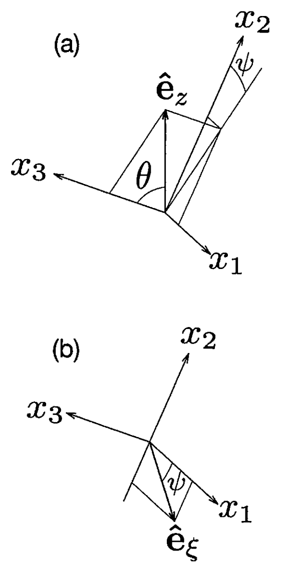

図 1－4: (a) $x_1x_2x_3$ 座標系における $\hat{\mathbf{e}}_z$ の方位. (b) $x_1x_2x_3$ 座標系における $\hat{\mathbf{e}}_\xi$ の方位.

簡単のため，連結球の力学的エネルギーとしては，連結球の質量中心のまわりの回転運動による運動エネルギーと重力による位置エネルギーだけを考える．それに比べて連結球の質量中心の並進運動による運動エネルギーは，検討する運動状態においては微小であり，無視できるものとして考慮しないことにする．重力加速度は g とせよ.

1－1

（１）溶接する前の１個の剛体球の中心を通る軸まわりの慣性モーメントを求めよ.

（２）x_1 軸，x_2 軸，x_3 軸まわりの連結球の主慣性モーメントをそれぞれ I_1，I_2，I_3 とする．I_1，I_2，I_3 を求めよ.

（３）連結球の回転運動の角速度ベクトルは，図１－３から明らかなように

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_z + \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\xi + \dot{\psi}\hat{\mathbf{e}}_3$$

である．ここで $\hat{\mathbf{e}}_z$，$\hat{\mathbf{e}}_\xi$，$\hat{\mathbf{e}}_3$ はそれぞれ z 軸，ξ 軸，x_3 軸方向の単位ベクトルである．$\hat{\mathbf{e}}_z$ と $\hat{\mathbf{e}}_\xi$ を，x_1 軸，x_2 軸，x_3 軸方向の単位ベクトル $\hat{\mathbf{e}}_1$，$\hat{\mathbf{e}}_2$，$\hat{\mathbf{e}}_3$ とオイラー角を用いて表し，角速度ベクトルの $x_1x_2x_3$ 座標系での成分を求めよ．図１－４を参考にしてもよい.

（４）回転運動する連結球のラグランジアンを求めよ.

（第１問　つぎのページにつづく）

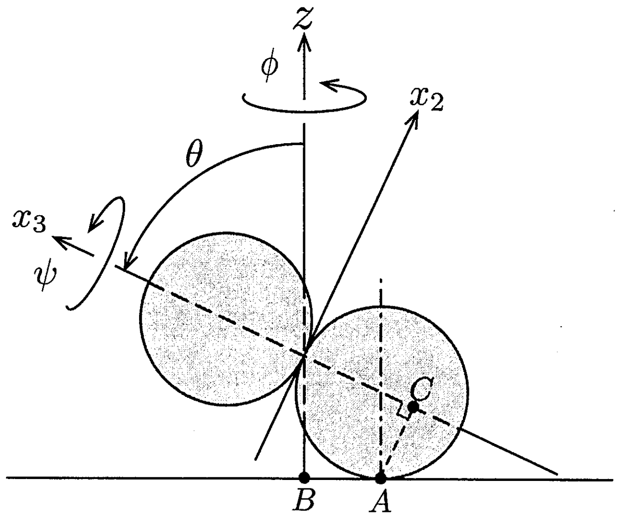

図 1－5: $\psi=0$ の瞬間の連結球の模式図．連結球と床が接する点を点 A，z 軸と床の交点を点 B，点 A から x_3 軸に下ろした垂線と x_3 軸の交点を点 C とする．

1－2

連結球は，適当な条件を満たした場合に連結球と床との接点 (図 1－5 の点 A) で滑らずに θ を一定の値に維持して運動する．転がり抵抗や空気抵抗は無視できるとして以下の設問に答えよ．

（1） 連結球が点 A で滑らずに z 軸まわりと x_3 軸まわりに回転するときに $\dot{\phi}$ と $\dot{\psi}$ の間に成り立つ関係を導け．図 1－5 の線分 AB と線分 AC の長さに注意せよ．

（2） θ に関するラグランジュの運動方程式から，連結球が点 A で滑らずに θ を一定の値に維持して運動する場合の R，$\dot{\phi}$ と θ の関係を求めよ．

（3） 連結球が $\theta<\frac{\pi}{2}$ の一定の値を維持して回転し続けるために必要な $|\dot{\phi}|$ の下限を求めよ．

（4） 連結球が十分に大きな $|\dot{\phi}|$ で回転するときの θ の下限を求めよ．

（第 1 問　おわり）

２．

問い２では，重力や摩擦は無視できるものとする．また，棒やばねの運動は壁に垂直な方向の伸縮のみである．r軸，x軸，変位の正方向は各図に示す矢印の方向である．以下の問いに答えよ．

２－１

一様な棒 a が伸縮する振動を考える．図２－１に示すように，棒 a の軸は壁 1 に垂直で，棒 a の一端は壁 1 に固定されており，他端には集中質量 1 がある．棒 a はばね定数がk_aのばねとして扱うことができ，軸方向に伸縮する．棒 a の質量はm_a，伸縮の無い状態での軸方向長さはlで，軸方向の単位長さあたりの質量は一定である．r軸は壁 1 に垂直な軸で，原点は壁 1 にある．集中質量 1 の質量はm_1，変位はxであり，棒 a の伸縮の無い状態でxは 0 となる．棒 a の伸縮の無い状態では位置rにある棒 a 上の点は，棒 a の伸縮の有る状態となると変位yを生じる．ここで，任意の位置r，任意の変位xに対して常に$y = \frac{rx}{l}$となると仮定する．$x = A_0 \sin\omega_n t$となる条件下で，この系の運動エネルギーの最大値とポテンシャルエネルギーの最大値が等しくなることを用いて，この系の固有角振動数ω_nを求めよ．なお，tは時間，A_0は 0 でない定数である．

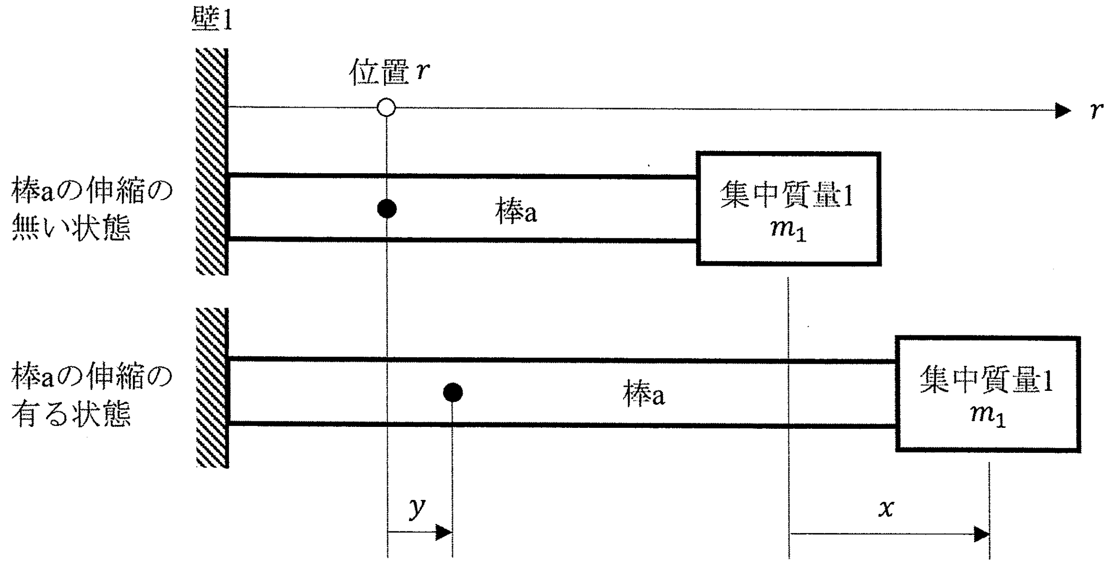

図２－１

２－２

図２－２に示す棒 b の縦振動（棒 b の各部の軸方向の伸縮の振動）を考える．棒 b の軸は壁 2 に垂直で，棒 b の一端は壁 2 に固定されており，他端は自由である．x軸は壁 2 に垂直で，原点は壁 2 にある．棒 b の縦振動の無い状態では位置xにある断面は，棒 b の縦振動の有る状態となると変位uを生じる．変位uは棒 b の縦振動の無い状態では 0 となる．時間をt，棒 b の軸方向長さをl，縦弾性係数をE，断面積（軸に垂直な断面の面積）をSとする．棒 b の密度はρであり，一定である．棒 b の各部は軸方向にのみ運動するものとする．また，棒 b の縦振動の無い状態で軸に垂直な断面は棒 b の縦振動の有る状態でも軸に垂直で平面を保ち，垂直応力は断面内で一様に分布し，縦弾性係数は断面内では一定である．なお，棒 b の縦振動の無い状態では棒 b の各部に伸縮は無いとする．また，強制力（外力）は無いとする．

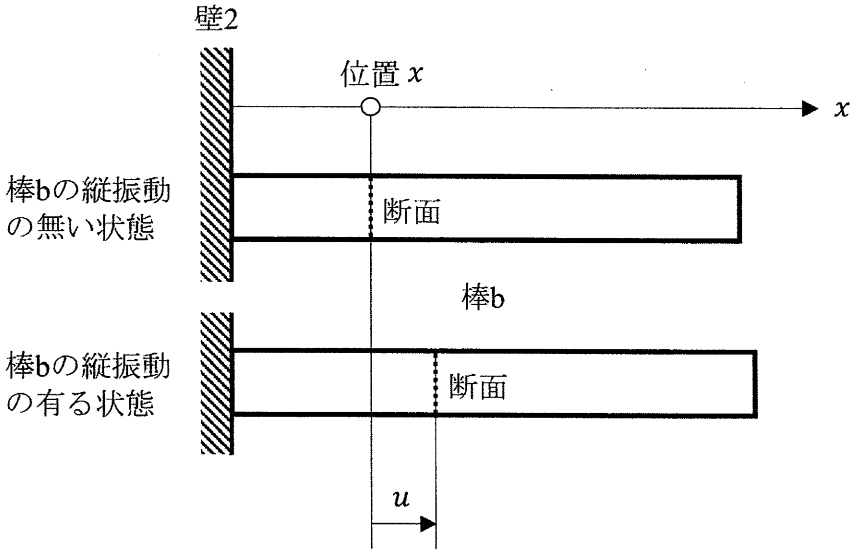

図２－２

（１） 棒 b の各断面の縦弾性係数と断面積が，棒 b の縦振動の無い条件下での断面の位置xによって決まるが，棒 b の縦振動によって断面の縦弾性係数と断面積は変わらない場合をとりあげる．棒 b の縦振動の無いときにxと$x + dx$の位置にある断面に挟まれた軸方向長さdxの微小要素について，棒 b の縦振動の有る条件下で両断面に作用する軸方向力を考えて，変位uに関する運動方程式を導出せよ．

（2） 棒 b が均質で断面が一様となる場合について，変位uに関する運動方程式を変数分離法を用いて解いて，棒 b が縦振動する場合の系の固有角振動数を求めよ．なお，棒 b が均質で断面が一様となる場合の変位uに関する運動方程式は次のように表すことができる．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

（3） 図２－３に示すように，図２－２の棒 b の自由端に集中質量 2 を配置し，集中質量 2 と壁 3 をばね 1 でつないだ場合について，棒 b が縦振動する場合の系の振動数方程式を導出せよ．なお，棒 b は均質で断面は一様である．集中質量 2 の質量はm_2，ばね 1 のばね定数はk_1であり，ばね 1 の質量は無視できるものとする．棒 b の縦振動の無い状態ではばね 1 の伸縮は無い．また，壁 2 と壁 3 は平行である．なお，系の固有角振動数は求めなくてよい．

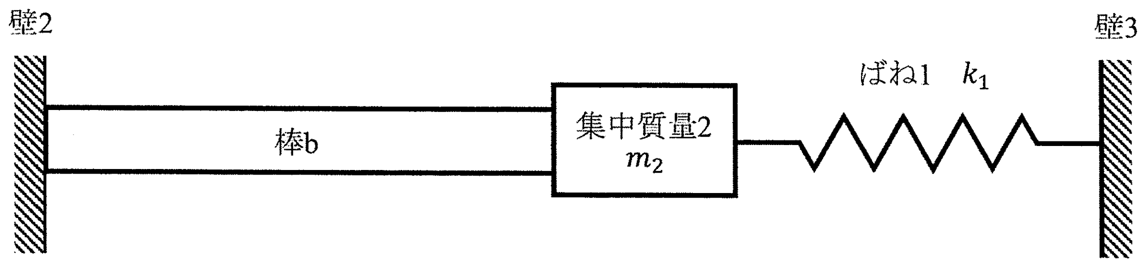

図２－３