2020年8月21日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2021年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

（1問100点 × 問題数4問 ＝ 合計400点）

9:00～12:30

問題数 4問

注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと.
2．　問題４問すべてに解答せよ.
3．　万一落丁を見つけた場合には，手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること.

1．

1－1

粘性のない流体の運動を記述するオイラー方程式は, $\vec{v}$ を速度, t を時刻, ρ を密度, p を圧力として,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1.1}$$

である. このとき, 以下の問いに答えよ.

（1）粘性のない流体の運動において, 特に「流れが定常で, 密度 ρ が全ての場所で等しい」ときには, ベルヌーイの定理

「ベルヌーイ関数 $H\left(=\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{p}{\rho}\right)$ が流れに沿って一定」

が成立する. この定理を, 方程式 (1.1) から導出せよ. その際, 次のベクトル解析の公式を用いてよい.

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) - \vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v}.$$

（2）問い（1）でベルヌーイの定理が成立しているとき, ベルヌーイ面（H が一定の面）と流線, 渦線, ∇H の関係がわかる概略図を描け.

（第１問　つぎのページにつづく）

1－2

複素平面 ($z = x + iy = re^{i\theta}$) 上で, 粘性のない 2 次元非圧縮性流体の渦なし流れを考える. このとき, $z = 0$ に中心を持つ半径 R の円柱 $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を過ぎる定常な流れは, 無限遠方での速度が $(u, v) = (U, 0)$ (u は x 成分, v は y 成分, U は定数) の場合, 複素速度ポテンシャル

$$f(z) = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + i\kappa \log z \quad (\kappa\text{は実定数}) \tag{1.2}$$

によって表される. また一般に, 複素速度ポテンシャル $f(z)$ は, 速度ポテンシャル ϕ 及び 流れ関数 ψ と $f(z) = \phi + i\psi$ の関係にある. このとき, 以下の問いに答えよ.

（1）式 (1.2) の $f(z)$ は, 無限遠方での速度として $(u, v) = (U, 0)$ を与えることを確認せよ.

（2）式 (1.2) の $f(z)$ が表す流れ関数 ψ を, 極座標 r と θ の関数として求めよ.

（3）問い（2）の結果を用いて, κ の値にかかわらず, 式 (1.2) の $f(z)$ が半径 R の円柱に沿った流れを表していることを説明せよ.

（4）円柱表面上の流速の x 成分 u と y 成分 v を, θ の関数として求めよ.

（5）円柱表面上の流体の圧力 p を θ の関数として求めよ.ただし, 無限遠方での圧力を p_∞ とし, 流体の密度は全ての場所で等しい値 ρ をとるとする.

（6）円柱に働く力の y 成分, すなわち揚力 F_yは, 流体が円柱に及ぼす圧力の y 成分を, 円柱表面上で積分することによって得られる. 問い（5）の結果を用いて, F_y を計算せよ.

（第１問　おわり）

2.

図2－1に模式的に示すような再熱器付きのジェットエンジンについて考える．作動流体の空気は気体定数 R の理想気体とみなし，その比熱容量比 γ は一定とする．ただし，R_0 を一般気体定数，M を空気のモル質量として $R=R_0/M$ である．系は定常状態にある．なお以下の問いではいくつかの圧力比が出てくるが，すべて低圧側に対する高圧側の比とする．すなわち，圧力比はいずれも 1 より大きい値である．

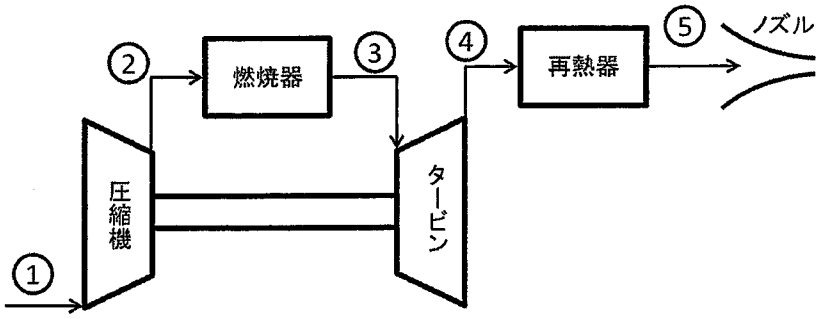


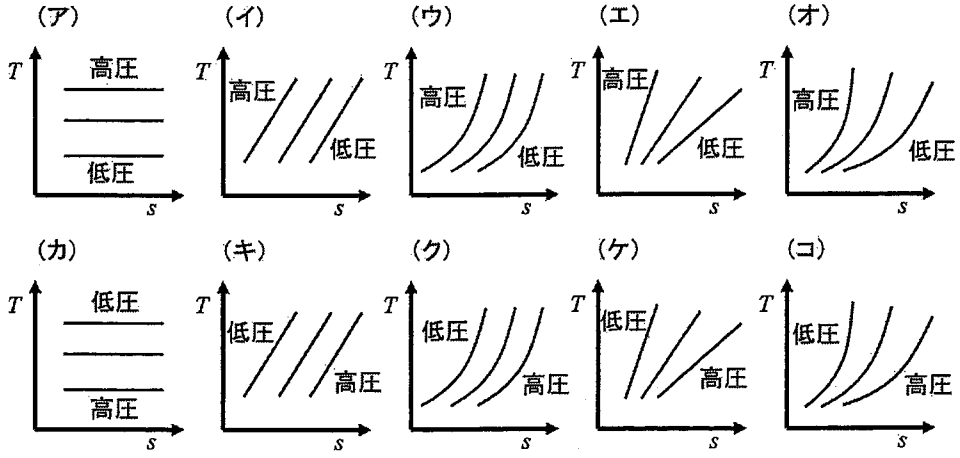
図2－1

作動流体についての以下の問いに答えよ．

(1) 単位質量当たりの定圧比熱容量 c_p を R と γ で表せ．

(2) この作動流体の T-s 図（縦軸：温度 T，横軸：比エントロピーs）において，圧力 p が一定の曲線を描きたい．T-s 図中の任意の点における圧力一定の曲線の勾配は $\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p$ と書ける．$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p$ を，その点での温度 T，気体定数 R および比熱容量比 γ で表せ．

(3) 圧力一定の曲線群のうち，圧力の値が異なる 3 本を描いたものとして，もっとも適切な図は下の（ア）～（コ）のうちどれか記号で答えよ．ただし，図中の「高圧」・「低圧」は圧力の相対的な高低を表す．



（第２問　つぎのページにつづく）

図2－1中の状態①から状態⑤までの過程を理想化し，次のような準静的過程を考える．状態①の作動流体（圧力 p_1，温度 T_1）は，圧縮機で断熱圧縮されて状態②となる．圧縮機前後の圧力比をφ_Cとする．状態②の作動流体は，燃焼器における等圧加熱を経て温度 T_3 の状態③に至る．状態③の作動流体は，タービンにおいて断熱膨張し，状態④に至る．タービン前後の圧力比をφ_Tとする．さらに状態④の作動流体は，再熱器における等圧加熱を経て状態⑤に至る．状態⑤での作動流体の温度は状態③と同じ温度 T_3 であるとする．状態①から状態⑤の過程に関する以下の問いに答えよ．ただし，数式の表記に使えるのは γ, c_p, p_1, T_1, T_3, φ_C, φ_Tとする．

(4) 状態①から状態⑤までの過程を，縦軸を温度 T，横軸を比エントロピーs とする T-s 図に描け．同様に縦軸を圧力 p，横軸を比体積 v とする p-v 図に描け．温度や圧力が等しくなる点に注意して描いたうえで，状態①～⑤の番号を付すこと．

(5) 状態②での作動流体の圧力と温度を求めよ．

(6) 状態①から状態②への断熱圧縮過程において，圧縮機が単位質量の作動流体にする仕事を求めよ．

(7) 状態④での作動流体の圧力と温度を求めよ．

(8) 状態③から状態④への断熱膨張過程において，単位質量の作動流体がタービンにする仕事を求めよ．

(9) 図2－1の通り，圧縮機は，タービンで得られる仕事によって駆動されている．このことを用い，φ_Cとφ_Tの関係を表す次式において，(A)，(B)，(C)に入る式あるいは値を求めよ．なお(A)と(B)はそれぞれの項の指数である．

$$\frac{\varphi_C^{(A)} - 1}{1 - \varphi_T^{(B)}} = (C)$$

状態⑤の作動流体をノズルへ導き，ノズル出口から噴出させることで推力を得る．ノズル入口における作動流体の状態は状態⑤であり，その流速は0（ゼロ）とみなす．ノズルは下流へ行くほど流路断面積が減少する先細ノズルである．ノズル出口での圧力は，状態①での圧力と同じ p_1 であるとする．ノズルでは外部との熱や仕事のやり取りはなく，また位置エネルギーの変化も無視できるとする．ノズル内の流れは1次元の等エントロピー流れとみなす．以下の問いに答えよ．特に断りがない限り，数式の表記に使えるのは γ, c_p, p_1, T_1, T_3, φ_C, φ_Tとする．

(10) ノズル出口における作動流体の温度を求めよ．

(11) ノズル出口における作動流体の流速を求めよ．

(12) ノズルの入口圧力と出口圧力の比，すなわちノズル圧力比が十分に高い場合，ノズル出口におけるマッハ数は1となる．ノズル出口におけるマッハ数が1となるφ_Tの範囲を，φ_Cおよび γ を用いて表せ．ただし，温度 T の作動流体の音速は$\sqrt{\gamma RT}$である．

（第２問　おわり）

3.

図３－１に示す残留応力のない不静定な構造物について考える．材料特性と断面形状が一様な３つの直線状部材（A-B, A-D, B-E）は，すべて同一の水平面内にあり，互いに直角に剛接合されている．この構造物は，点 D と E において剛体壁に固定されている．この構造物の点 A と B に鉛直方向の集中力 P が同図に示すように逆対称に作用した状態について考える．

部材 A-B の長さは $2l_1$，部材 A-D および B-E の長さは共に l_2 とする．部材の断面寸法は，長さ l_1, l_2 よりも十分に小さいと仮定し，各部材は，曲げモーメント M，および，ねじりモーメント T に対して，それぞれ，はり，および，棒としてふるまうものとする．各部材の断面二次モーメントを I，断面二次極モーメントを I_p と表す．ここで，部材において，重力による変形，軸力による軸方向変形，および，せん断力によるせん断変形は無視できるとする．

すべての部材は等方な線形弾性体からなり，その縦弾性係数を E，横弾性係数を G とする．

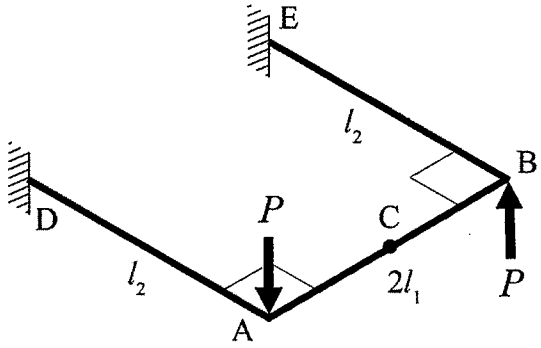


図３－１

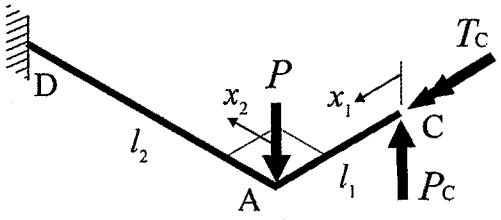


図３－２

３－１

部材 A-B の中点を点 C とし，対称性を考慮して点 C において部材 A-B を仮想的に切断して考えると，図３－２に示すように，点 C には，鉛直方向の不静定力 P_C，および，不静定ねじりモーメント T_C が存在する．ここで，⟵ は，右ネジ方向を正とするねじりモーメントを表す．部材 C-A，および，A-D には，部材の長手方向に点 C，A を原点とする x_1，x_2 座標をそれぞれ設定する．以下の問いに答えよ．

（１）C-A 間，および，A-D 間における曲げモーメント $M(x_1)$, $M(x_2)$，ねじりモーメント $T(x_1)$, $T(x_2)$，および，せん断力 $F(x_1)$，$F(x_2)$をそれぞれ求めよ．

（２）C-A 間，および，A-D 間に貯えられる弾性ひずみエネルギー W_{CA}，および，W_{AD} をそれぞれ求めよ．

（第３問　つぎのページにつづく）

（3）全弾性ひずみエネルギーW（$=W_{CA}+W_{AD}$）に対して，カスチリアーノの定理を用いて，P_C，T_C，および，P が満たすべき式を２つ導出し，それぞれの式を $\alpha_1 P_C+\alpha_2 T_C=\alpha_3 P$ の線形方程式の形式に表したとき，それぞれの式の係数 α_1, α_2，および，α_3 を求めよ．

（4）部材の断面形状を軸対称と仮定することにより，断面二次モーメント I と断面二次極モーメント I_p の関係式を導け．また，この式を用いて，問い（3）で得られた２つの式を単純化して整理せよ．

３－２

等方な線形弾性体の場合，縦弾性係数 E と横弾性係数 G は，ポアソン比 ν を用いて，$E=2G(1+\nu)$ と関係づけられる．この関係式を以下の手順で導出せよ．

（1）平面応力状態の特殊な状態として，図３－３に示す純粋せん断（$\sigma_x=\sigma, \sigma_y=-\sigma, \tau_{xy}=0$）を考える．モールの応力円を図示して，$y$ 軸から $\theta=\pi/4$ 傾いた平面に作用するせん断応力 $\tau_{\pi/4}$ を求めよ．

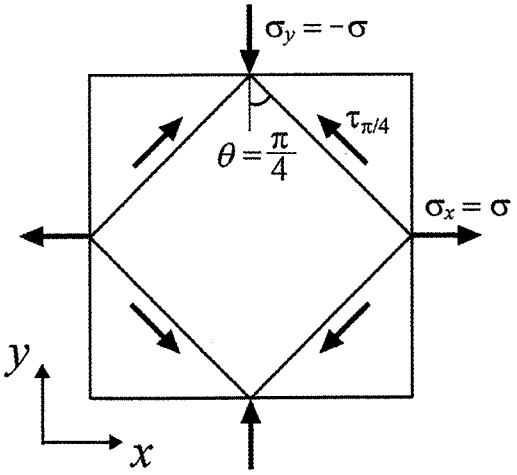


図３－３

（2）平面応力状態において，x, y 方向の垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$，および，せん断ひずみ γ_{xy} と垂直応力 σ_x, σ_y，および，せん断応力 τ_{xy} の関係は，次式のように表される．

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y),\quad \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x),\quad \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}$$

図３－３の状態におけるこれらのひずみを求め，モールのひずみ円を図示して，y 軸から $\theta=\pi/4$ 傾いた平面に対するせん断ひずみ $\gamma_{\pi/4}$ を σ を用いて表せ．

（第３問　つぎのページにつづく）

（3）以上で求められた $\tau_{\pi/4}$ と $\gamma_{\pi/4}$ の関係から，縦弾性係数 E と横弾性係数 G の関係を導出せよ．

3－3

問い3－2で示した E と G の関係式を用いて，問い3－1（4）で得られた2つの式を以下の2つの仮定の下で単純化して整理する．部材の長さが，$l_1 = l_2$ の関係を満たすと仮定し，$l_1 = l$，および，$l_2 = l$ とする．また，ポアソン比が $\nu = 0$ と仮定する．以下の問いに答えよ．

（1）不静定力 P_C，および，不静定ねじりモーメント T_C を求めよ．

（2）点Aにおける部材のたわみ量 δ_A を求めよ．

3－4

図3－1に示す構造物に対して，2つの力 P が対称に作用する場合，例えば，点Bにおける力 P の作用方向が，点Aと同じ鉛直下向きの場合，構造物の力学的ふるまいを100文字以下で説明せよ．

（第3問　おわり）

4．

図４－１に示すように，大気中を大きさ T の推力で飛行するロケットに働く空気力を集中力として表現した場合，飛行中のロケットが迎角αをとった状態では，ロケットの質量中心CGの回りに空気力と推力によるモーメントが作用する．空気力Nの作用点は圧力中心CP（あるいは空力中心）と呼ばれる．圧力中心は機軸上に存在するとする．ここで迎角αは，対気速度方向（進行方向）に対するロケットの機軸のなす角度である．また，ロケットの姿勢角は，水平方向と機軸方向のなす角度である．以下では，ロケットの紙面内の回転運動に限って考え，並進運動については考えない．角度は図示方向を正とする．

機軸方向の変化が起こるとロケットの進行方向は多少変化するが，必ずしも機軸方向そのものに一致しない．この関係を図４－１に示す．ここで，角速度も角加速度も零の平衡状態のときの姿勢角（姿勢基準軸方向）をθ_0と表し，そのときのロケットの進行方向は機軸方向と一致する．微小じょう乱によるこの平衡状態からの姿勢角の変化をθとする．

ロケットを剛体とみなし，質量中心回りの慣性モーメントをIとすると，このロケットの回転運動の運動方程式は，

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = M_a + M_c \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (4.1)$$

で表される．ここで，M_a は空力モーメントで，ロケットの圧力中心がロケットの質量中心とずれているために発生する．M_c は制御モーメントで，θを制御する際に，大きさTの推力が作用する方向であるエンジンの操舵量（舵角）δにより発生する．なお，δは推力方向と機軸方向のなす角度である．

（第４問　つぎのページにつづく）

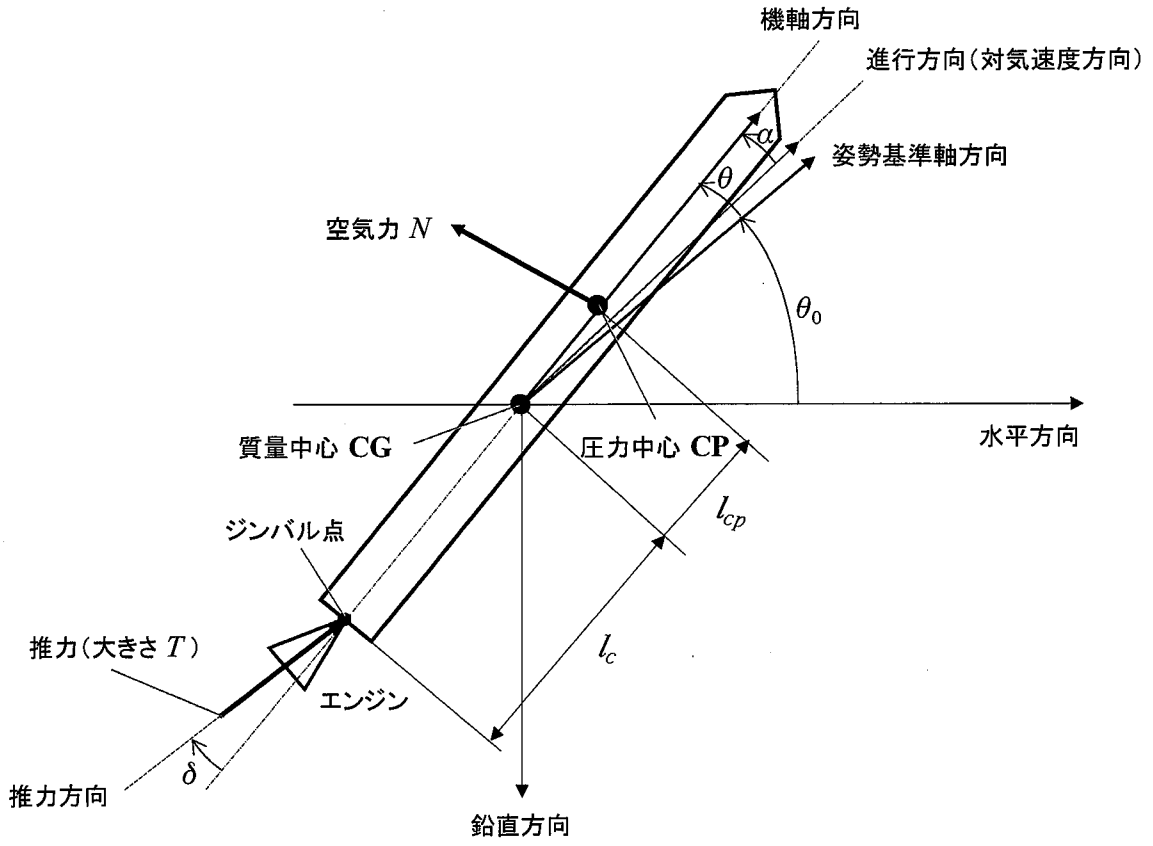


図４－１

迎角αは小さく，$\theta \approx \alpha$とおく．また，迎角αが微小であるとき，空気力の進行方向に直交する成分は迎角αに比例するとみなすことができ，この比例係数を$N_\alpha > 0$とおく．さらに舵角δの動く範囲は小さく$\sin\delta \approx \delta$と近似でき，ロケットの回転運動の運動方程式(4.1)はつぎのように表されるとする．

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \mu_\alpha \theta = \mu_c \delta \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (4.2)$$

$$\mu_\alpha = \frac{N_\alpha l_{cp}}{I}, \quad \mu_c = \frac{T l_c}{I}$$

ここで，l_{cp}は機軸上における質量中心に対する圧力中心の位置である．ただし，圧力中心が質量中心より前方にあるとき正，後方にあるとき負とする．l_cは質量中心とエンジンのジンバル点との距離で正の定数とする．ジンバル点は，舵角を変えるためにエンジンを傾ける際の支点である．

このとき，以下の問いに答えよ．

（第４問　つぎのページにつづく）

４－１

(4.2)式の微分方程式をラプラス変換して，入力を舵角$\delta(t)$，出力を姿勢角の変化$\theta(t)$とする場合の伝達関数

$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{\Delta(s)}$$

を求めよ．ここで，$\Theta(s)$と$\Delta(s)$はそれぞれ姿勢角の変化$\theta(t)$と舵角$\delta(t)$のラプラス変換を表す．

さらに，$G(s)$のインパルス応答を求めよ．また，圧力中心と質量中心の位置関係によって，$G(s)$のインパルス応答がどのように変化するかを述べよ．

ロケットを安定に飛行させるための姿勢制御系として，以下のようにフィードバックを行なって舵角$\delta(t)$を操作する．

$$\delta(t) = k_1\varepsilon(t) + k_2\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + d(t) \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (4.3)$$

$$\varepsilon(t) = r(t) - \theta(t)$$

ここで，$\varepsilon(t)$は偏差，$r(t)$は目標値，$d(t)$は外乱，k_1，k_2はフィードバックゲインである．

このとき，以下の問いに答えよ．

４－２

(4.3)式の姿勢制御を施したときの閉ループ系のダイナミクスを，$\theta(t)$に関する微分方程式で示せ．ただし，$r(t)=0$，$d(t)=0$とする．

さらにこの姿勢制御系が安定となるためのフィードバックゲインk_1，k_2の範囲を示せ．

４－３

問い４－２で導いた微分方程式が，減衰比ζ，固有角周波数（自然角周波数）ω_nをもつ以下の２次遅れ系となるようにフィードバックゲインk_1，k_2を選定する．

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{d\theta(t)}{dt} + \omega_n^2\theta(t) = 0$$

（第４問　つぎのページにつづく）

$\omega_n = 10.0\ \mathrm{rad/s}$，$\zeta = 0.5$と選定する場合の，フィードバックゲイン$k_1$，$k_2$を求めよ．なお，$\mu_c = 2.5\ \mathrm{s}^{-2}$，$\mu_\alpha = 1.0\ \mathrm{s}^{-2}$とする．

以下の問い４－４ならびに問い４－５では，μ_α，μ_c，k_1，k_2は問い４－３の値とする．

４－４

(4.3)式の姿勢制御を施した系のブロック線図は図４－２(a)で表わされる．ここで$R(s)$，$E(s)$，$D(s)$は，それぞれ目標値$r(t)$，偏差$\varepsilon(t)$，外乱$d(t)$のラプラス変換であり，$\Theta(s)$と$\Delta(s)$はそれぞれ姿勢角の変化$\theta(t)$と舵角$\delta(t)$のラプラス変換である．図４－２(a)において，$R(s) = 0$の場合，ブロック線図は図４－２(b)のように変形できる．ここで$K(s)$と$G(s)$は，それぞれ制御器と制御対象のラプラス変換を表わす．図４－２(b)の系において外乱に対するインパルス応答を求め，その概形を説明せよ．ただし厳密な数値の算出は不要である．

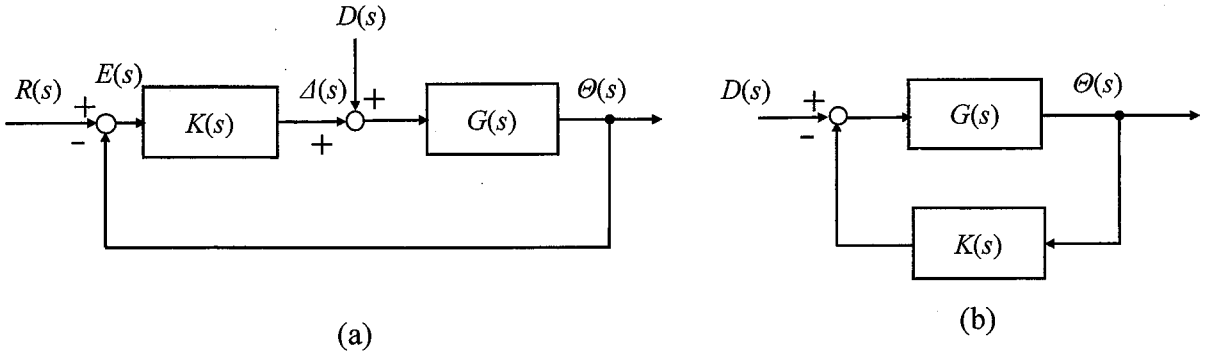


図４－２

４－５

図４－２の姿勢制御系の一巡伝達関数を導出してボード線図の概形を描き，図中で位相余裕に対応する部分を示せ．ボード線図のゲイン線図の概形は折線近似で示すこと．必要ならば，以下の数値を参照すること．

$$\log_{10}\frac{202}{5} \approx 1.6,\ \log_{10}\frac{5}{2} \approx 0.4$$

（第４問　おわり）