2020年8月20日

機械理工学専攻・マイクロエンジニアリング専攻・航空宇宙工学専攻

2021年度大学院修士課程入学試験問題

数学

（180点）

9:30～11:30

問題数 2問

注意事項

1．　問題冊子は試験監督者の指示があるまで開かないこと.
2．　問題２問すべてに解答せよ.
3．　万一落丁を見つけた場合には，手を挙げてすみやかに試験監督者に申し出ること.

1．

以下の漸化式により定められる数列$\{a_k\}$について考える．kは自然数である．

$$a_{k+3}=4a_{k+2}-5a_{k+1}+2a_k$$

ここで，$a_1=0$，$a_2=2$，$a_3=3$である．

以下の問いに答えよ．

1－1　3次元列ベクトル$\boldsymbol{x}_k$を以下の通り定める．

$$\boldsymbol{x}_k=\begin{bmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \\ a_k \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k$を満たす3次正方行列$\boldsymbol{A}$を求めよ．

1－2　行列$\boldsymbol{A}$の固有方程式は重解を持つ．この重解となる固有値をλ_1，残りの固有値をλ_2とし，λ_1，λ_2に対応する固有ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$とする．λ_1，λ_2，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$を求めよ．

1－3　以下のような行列$\boldsymbol{J}$を考える．ここで，p，qは任意の実数である．

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{J}^n$が以下のように表されることを示せ．

$$\boldsymbol{J}^n=\begin{bmatrix} p^n & np^{n-1} & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 0 & 0 & q^n \end{bmatrix}$$

ここでnは任意の自然数である．

1－4　上の行列$\boldsymbol{J}$において，行列$\boldsymbol{A}$の固有値λ_1をpに，固有値λ_2をqに代入した場合を考える．さらに，ある3次元列ベクトルを$\boldsymbol{d}$とし，行列$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{d},\boldsymbol{v}_2]$を考えたとき，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{d}$が1次独立となり，かつ，$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$を満たす$\boldsymbol{P}$を一つ求めよ．

1－5　nを任意の自然数とする．$\boldsymbol{A}^n$を求めよ．

1－6　上の結果を用いて数列$\{a_k\}$の一般項を求めよ．

（第1問　おわり）

2．

デカルト座標系を用いて位置が表される点の運動を考える．デカルト座標系の運動方程式が複雑なので極座標系で表現したところ，次の連立常微分方程式が得られた．

$$\begin{cases} \dot{r} &= \mu r - \alpha r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + \beta r^2 \end{cases}$$

ただし，この方程式は無次元化されていて $\alpha = 1$ であり，$\dot{( )}$ は時間 t に関する微分 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ を表す．デカルト座標系の変数 x と y は，極座標系の変数 r $(0 \leq r)$ と θ を用いて $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と表される．パラメータ μ, ω, β と全ての変数は実数であり，ω と β は $0 < \omega$ と $0 < \beta$ の範囲にある．パラメータ μ の値に応じた解の変化を調べる．

以下の問いに答えよ．

2－1　パラメータ μ の値によって $\dot{r} = 0$ となる r の個数が変わることを，以下では分岐と呼ぶ．分岐するときの μ の値 μ^* を求めよ．また，分岐の前後で $\dot{r} = 0$ となる r の個数は，どのように変化するか答えよ．

2－2　分岐の前後 $\mu < \mu^*$ と $\mu^* < \mu$ で場合分けし，それぞれ r-$\dot{r}$ グラフを描け．また，分岐後の $\mu^* < \mu$ には，$r = R$ （R は正の定数）の解があるが，この R を求めよ．

2－3　与えられた極座標系表現の連立常微分方程式をデカルト座標系表現に書き変えよ．また，その微分方程式を原点まわりで変数 (x, y) について線形化せよ．

2－4　問い2－3で線形化された方程式の一般解を求めよ．

2－5　これまでの結果も考慮し，与えられた連立常微分方程式の解について考える．分岐の前後で場合分けし，それぞれ，解の経路の概略を x-y グラフに描け．その際，$\beta|\mu| \ll \omega$ と考えよ．分岐後の $\mu^* < \mu$ では，原点から r が $R < r$ となるまでの範囲でグラフを描き，問い2－2の $r = R$ の解の経路も描け．いずれの場合でも，グラフを描く範囲に渡る様子がわかるように配慮して，複数の解の経路を描き，全てに運動の方向を矢印で記入せよ．